

Cahn-Hilliard 方程式の 定常解の大域的分岐構造と関連する話題

龍谷大学・理工学部 四ツ谷晶二

微分方程式の解の大域的分岐構造を完全に調べることは最も基本的ながら難しい問題である。なぜならば、これが分かるということは、考えている微分方程式に含まれるパラメータをいかように与えても、そのパラメータ値においての、微分方程式の解の存在・非存在・一意性・多重度に関して即座に完全に解答できることを意味するからである。

過去に多くの研究があるよく知られた非線形微分方程式であっても、解の大域的構造が完全に解明されているものは、ごく少数である。下記文献 [WY2010] ~ [IKOY2003] において、そこに現れる方程式に対しては、楕円関数や完全楕円積分を用いることにより、完全に解明できることを示した。すなわち、1次分岐のみならず2次以降の分岐を含めた分岐構造が完全にわかるのである。

得られた解の挙動はさらに大変興味深い。例えば、特異摂動問題に対して、新たな解法と全く異なる視点を与える。すべての解が明示的に表示されていれば、特異摂動問題はの解表示に含まれる摂動パラメータを素直に零に近づけたときの極限を調べる問題に帰着されるからである。

特に、論文 [KMY2007] において、空間1次元の Cahn-Hilliard 方程式の定常解の分岐構造を完全に決定し、特異摂動問題も従来と異なる自然な視点から見直しを行った。講演の際には、[KMY2007] 中の図に加えて新たに数式処理ソフト Maple で描いた作成した立体図を用いて分岐解の形状を詳しく説明したが、ここでは割愛する。

すべての解の表示を求めるアイデアは極めて自然な考え方で、昔の人も考えたであろうが、計算が膨大で通常はすぐに捨て去る方法である。計算の膨大さとは、複雑ではあるが単調な、微分計算・代数式の計算が主であり、見通しのない手計算では一生を費やしても不思議でない量の計算である。

ところが、現在、充実した視覚化機能をもつ数式処理ソフト Maple, Mathematica 等で気楽に楕円関数や完全楕円積分に関係した微分・代数計算でき、いろんな視点から視覚化できる状況になっている。それを使わない手はないと思い、数式処理ソフトを実験装置と検算の両方に使い、研究を行っている。

楕円関数関係の記号を抜粋して説明する。第1種完全楕円積分、第2種完全楕円積分、第3種完全楕円積分はそれぞれ、

$$\begin{aligned} K(k) &:= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, & k \in [0, 1), \\ E(k) &:= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, & k \in [0, 1), \\ \Pi(\nu, k) &:= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1+\nu \sin^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, & k \in [0, 1), \end{aligned}$$

で定義される．基本的な性質は

$$E(0) = K(0) = \frac{\pi}{2}, \quad E(1) = 1, \quad K(k) \sim \log(4(1-k^2)^{-1/2}) \text{ as } k \rightarrow 1.$$

である．

ヤコビの楕円関数 $\text{sn}(x, k)$ は

$$\text{sn}^{-1}(z, k) := \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}, \quad z \in [0, 1], \quad k \in [0, 1),$$

の区間 $[0, K(k)]$ 上の逆関数を通常三角関数のように折り返しながら拡張して定義したものである．さらに， $\text{cn}(x, k)$ は

$$\text{cn}^2(z, k) = 1 - \text{sn}^2(z, k).$$

を満たすものとして定義される．定義より， $\text{sn}(x, 0) = \sin x$ ， $\text{cn}(x, 0) = \cos x$ が成立し， $k \rightarrow 1$ のとき， $\text{sn}(x, k)$ ， $\text{cn}(x, k)$ の周期は ∞ となる．

下記文献にある研究においては，解の大域的構造を決定する問題は，完全楕円積分 $K(k)$ ， $E(k)$ ， $\Pi(*, k)$ ， k からなる連立超越方程式の解の非存在，存在，一意性，解の多重度を正確に決定する問題に帰着される．しばしば，第三種完全楕円積分 $\Pi(\nu, k)$ の ν の所に， $K(k)$ ， $E(k)$ が入っている完全楕円積分の合成関数までが現れる．もともとの問題の難しさを同値な超越方程式に帰着した訳であるから，難しい超越方程式が出てくるのは当然である．

完全楕円積分自身， k で微分すればするほどますます複雑になる．この超越方程式の解析には，完全楕円積分の合成関数さえも微分するので，単純であるが複雑な計算が必要となる．このため，いろいろと新たな工夫がある．しんどくもあり，楽しいところである．

数段階の消去の工夫を行うことにより，しばしば，最後の最後に問題は， $K(k)$ ， $E(k)$ ，および k からなる有理式の増減，値域を調べる問題に帰着される．

応用上，特に K, E に関する斉次式の場合が重要である．このとき，問題は E/K と k の多項式の符号を調べる問題に帰着できる．まず，この場合から説明する．

イメージをもってもらうため具体例を示す．

例題 次式を証明せよ．

$$\begin{aligned} & (k^4 - k^2 + 1) \left(\frac{E(k)}{K(k)} \right)^4 - 2(1 - k^2)(2 - k^2) \left(\frac{E(k)}{K(k)} \right)^3 + 6(1 - k^2)^2 \left(\frac{E(k)}{K(k)} \right)^2 \\ & + 2(2 - k^2)(1 - k^2)^2 \left(\frac{E(k)}{K(k)} \right) - (1 - k^2)^3 > 0, \quad k \in (0, 1) \end{aligned}$$

この例題は易しくはない．実際，論文 [KMY2007] 中では複雑な背理法を用いてなんとか証明した．しかし，苦し紛れの対処である．

このような問題にこみ入った背理法を用いずに，一般性をもった方法で直截に示すことができる．

基本的なアイデアは次の通りである．まず， $E(k)/K(k)$ を上下から

$$\underline{g}(k) < E(k)/K(k) < \bar{g}(k), \quad k \in (0, 1)$$

と挟む．

$$U := E(k)/K(k)$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned} R(k, U) &:= (k^4 - k^2 + 1)U^4 - 2(1 - k^2)(2 - k^2)U^3 + 6(1 - k^2)^2U^2 \\ &\quad + 2(2 - k^2)(1 - k^2)^2U - (1 - k^2)^3 > 0, \quad k \in (0, 1), \quad \underline{g}(k) \leq U \leq \bar{g}(k) \end{aligned}$$

を示せばよい．

このためには，例えば， $\underline{g}(0) = \bar{g}(0) = 1$ のとき，

$$R(k, \bar{g}(k)) > 0, \quad k \in (0, 1),$$

$$R(1, U) > 0, \quad U \in (0, 1),$$

$$R(k, \underline{g}(k)) > 0, \quad k \in (0, 1)$$

であり， $R(k, U)$ が，領域 $\{(k, U) : k \in (0, 1), \underline{g}(k) < U < \bar{g}(k)\}$ の内部に停留点をもたない，即ち，

$$(R_k(k, U), R_U(k, U)) \neq (0, 0), \quad k \in (0, 1), \quad \underline{g}(k) < U < \bar{g}(k).$$

を示せばよい．

さらに， $\underline{g}(k), \bar{g}(k)$ が多項式，あるいは，平方根の繰り返しで表されるものであれば，2変数多項式に関する種々の標準的な手法が利用可能となる．即ち，必要があれば，古典代数学のスツルムの零点定理，現代代数学のグレブナー基底等を用いることにより上記の4つの条件は確認可能である．

問題は，そのように都合のよい $\underline{g}(k), \bar{g}(k)$ をどうして見つけるかである．2006年度春の年会において， $E(k)/K(k)$ のマクローリン展開を利用した，閉区間 $[0, 1]$ で $E(k)/K(k)$ に一様収束する，上下からの比較関数を報告をした ([MMY2006])．しかし，

$$\frac{E(k)}{K(k)} \sim \frac{1}{\log(4(1 - k^2)^{-1/2})} \quad \text{as } k \rightarrow 1 - 0$$

であり， $k = 1$ での特異性のため応用上は不十分である．そこで，分数冪 $(1 - k^2)^{1/2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) を用いた比較関数を以下で示す．

まず， $E(k)/K(k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 1 - 0$) であるから， $E(k)/K(k)|_{k=1} := 0$ と定義すると， $E(k)/K(k)$ は閉区間 $[0, 1]$ で連続な関数となる．

任意の $a > b > 0$ に対して，算術・幾何平均の漸化式

$$a_{\ell+1} = \frac{a_\ell + b_\ell}{2}, \quad b_{\ell+1} = \sqrt{a_\ell b_\ell}, \quad c_{\ell+1} = \frac{a_\ell - b_\ell}{2} \quad (\ell = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

を考える．極限値を $\text{AGM}(a,b)$ とかく．1818年, Gauss は次を得た ([TI2007], [E1976]) ．

Theorem A. $a = 1, b = \sqrt{1-h}$ とする．このとき,

$$\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})} = 1 - \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell-1} c_{\ell}^2.$$

この定理は, $\text{AGM}(a,b)$ と完全楕円積分との関係を調べるなかで発見されたものである．右辺は h の関数である．これより, 上からの比較関数はごく自然に, 下からの比較関数は若干の補正で得られる．

Theorem [MMY2010] 関数 $\underline{g}_n(h), \bar{g}_n(h)$ を

$$\underline{g}_n(h) := 1 - \sum_{\ell=0}^n 2^{\ell-1} c_{\ell}^2 - 2^{n-1} c_n^2, \quad \bar{g}_n(h) := 1 - \sum_{\ell=0}^n 2^{\ell-1} c_{\ell}^2$$

で定義する．このとき, 次の事実が成立する．

1) 任意の非負の整数 n に対して, 次の評価式が成り立つ:

$$\underline{g}_n(h) \leq E(\sqrt{h})/K(\sqrt{h}) \leq \bar{g}_n(h) \quad h \in [0, 1].$$

なお, $\underline{g}_n(h)$ との等号成立は $h = 0, 1$ の場合のみであり, $\bar{g}_n(h)$ との等号成立は $h = 0$ の場合のみである．

2) $\underline{g}_n(h), \bar{g}_n(h) \Rightarrow E(\sqrt{h})/K(\sqrt{h})$ uniformly on $[0, 1]$ as $n \rightarrow \infty$.

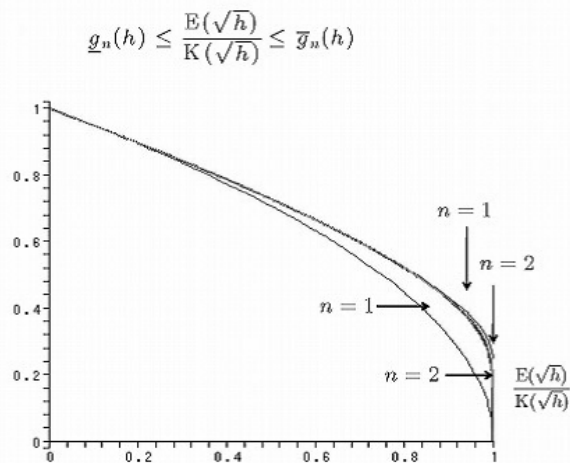


図 1: $E(\sqrt{h})/K(\sqrt{h})$ の上下からの近似式

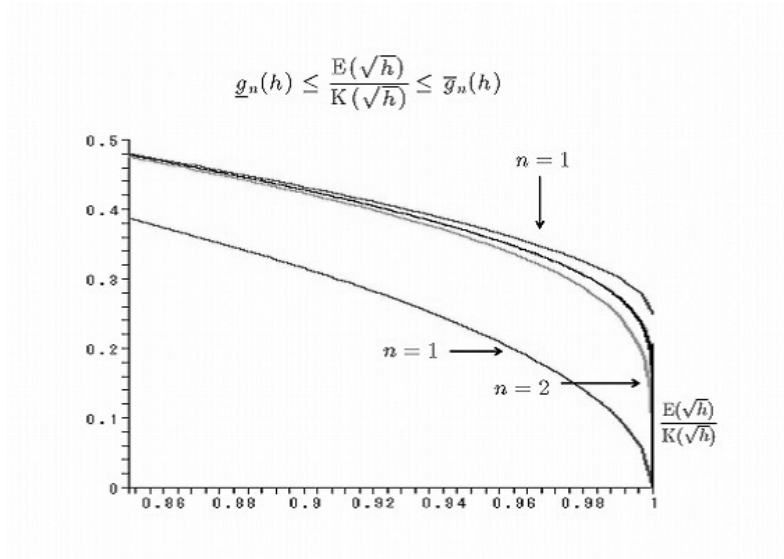


図 2: 近似式の $h=1$ の近くでの様子

具体的に, $\underline{g}_n(h)$, $\bar{g}_n(h)$ ($n = 1, 2, 3$) を示す.

$$\begin{aligned} \underline{g}_0(h) &= 1 - h, & \bar{g}_0(h) &= 1 - \frac{h}{2}, \\ \underline{g}_1(h) &= (1 - h)^{1/2}, & \bar{g}_1(h) &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{(1 - h)^{1/2}}{2}, \\ \underline{g}_2(h) &= (1 - h)^{1/4} + (1 - h)^{3/4} - (1 - h)^{1/2}, & \bar{g}_2(h) &= \frac{1}{4} - \frac{h}{8} - \frac{(1 - h)^{1/2}}{4} \\ & & & + \frac{(1 - h)^{1/4}}{2} + \frac{(1 - h)^{3/4}}{2}. \end{aligned}$$

先の例題を書き直し, 証明を与える.

応用例

$$\begin{aligned} &(h^2 - h + 1) \left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})} \right)^4 - 2(1 - h)(2 - h) \left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})} \right)^3 + 6(1 - h)^2 \left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})} \right)^2 \\ &+ 2(2 - h)(1 - h)^2 \left(\frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})} \right) - (1 - h)^3 > 0, \quad h \in (0, 1). \end{aligned}$$

証明 $\underline{g}(h) = \sqrt{1 - h}$, $\bar{g}(h) = 1$ とおく. このとき,

$$\underline{g}(h) < \frac{E(\sqrt{h})}{K(\sqrt{h})} < \bar{g}(h), \quad 0 < h < 1$$

であり,

$$\begin{aligned}
R(h, \bar{g}(h)) &= R(h, 1) = h^3 > 0, \quad 0 < h < 1, \\
R(1, U) &= U^4 > 0, \quad 0 < U < 1, \\
R(h, \sqrt{1-h}) &= (1-h)^2(1-\sqrt{1-h})^4 > 0, \quad 0 < h < 1.
\end{aligned}$$

が成り立つ．一方，グレブナー基底を求めることにより，

$$R_h(h, U) = 0, \quad R_U(h, U) = 0$$

の $0 < h < 1, 0 < U < 1$ における解は $(h, u) = (1/2, 1/2)$ のみであることがわかる．したがって， $R(h, U)$ は $\{(h, U) : 0 < h < 1, \underline{g}(h) < U < \bar{g}(h)\}$ の内部に停留点をもたない．したがって，不等式は証明された．

次に，あつかう問題が K, E の斉次式でない場合を考える．与えられ式を K の K, E の最高総次数乗で割り算すると，一般に， $E(k)/K(k), 1/K(k)$ がかたまりとしてあらわれるので， $U := E(k)/K(k), V := 1/K(k)$ とおき，3次元空間 (k, U, V) の中で同様の議論を行えばよい．

この際のポイントは， $1/K(k)$ の上下からの精密な近似式を得ることであるが，それは可能である．実際，Gauss により

$$\frac{1}{K(\sqrt{h})} = \frac{2}{\pi} \cdot AGM(1, \sqrt{1-h})$$

が示されているので，先に説明した

$$\frac{2}{\pi} a_\ell, \quad \frac{2}{\pi} b_\ell \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots)$$

が上下からの高精度の比較関数として使えるのである．

参考文献

- [MMY2010] 村井実・松本和一郎・四ツ谷晶二，2010年度春の年会 函数方程式論 アブストラクト
- [WY2010] T.Wakasa and S.Yotsutani, *Asymptotic profiles of eigenfunctions for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems*, Commun. Pure Appl. Anal. 9 (2010), to appear.
- [WY2008] T.Wakasa and S.Yotsutani, *Representation formulas for some 1-dimensional linearized eigenvalue problems*, Commun. Pure Appl. Anal. 7 (2008), 745-763.
- [KMY2007] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *Stationary solutions to the one-dimensional Cahn-Hilliard equation: proof by the complete elliptic integrals*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 19 (2007), 609-629.

- [Y2006] S. Yotsutani (with I. Takagi and H. Takaichi): *On a shadow system to Gierer-Meinhardt system with non-local term*. RIMS Kokyuroku 1475 (2006), 149-154.
- [MMY2006] 村井実-松本和一郎-四ツ谷晶二, 2006 年度春の年会 函数方程式論ア
ブストラクト
- [KMY2005g] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *Global bifurcation structure of a one-dimensional Ginzburg-Landau model*, J. Math. Phys., 46 (2005), no. 9, 095111, 24.
- [KMY2005] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, *A complete bifurcation diagram of the Ginzburg-Landau equation with periodic boundary conditions*, Commun. Pure Appl. Anal., 4 (2005), 665-682.
- [MMY2005] W. Matsumoto, M. Murai and S. Yotsutani, *What have we learned on the problem: Can one hear the shape of a drum?*, Phase Space Analysis of Partial Differential Equations, II (2005), 345-361.
- [LNY2004] Y. Lou, W.-M. Ni and S. Yotsutani, *On a limiting system in the Lotka-Volterra competition with cross-diffusion*. Partial differential equations and applications, Discrete Contin. Dyn. Syst., 10 (2004), 435-458.
- [IKOY2003] H. Ikeda, K. Kondo, H. Okamoto and S. Yotsutani: *On the global branches of the solutions to a nonlocal boundary-value problem arising in Osseen's spiral flows*, Commun. Pure Appl. Anal., 3 (2003), 381-390.
- [TI2007] 竹之内脩 - 伊藤隆, $\pi - \pi$ の計算 アルキメデスから現代まで -, 共立出版, 2007 .
- [E1976] Eugene Salamin, Computation of π using arithmetic-geometric mean. Math. Comp. 30 (1976), no. 135, 565-570.