バクテリアの運動

明治大学理工学研究科基礎理工学専攻数学系
澁谷　幸樹

①研究動機

これまでは，蟻のランダムウォークについて研究した．

- もっと複雑で，ランダムな運動を表す方程式は複雑なものになるのか？
- シンプルな方程式で表すことはできないのか？

より複雑な動きをする，バクテリアの運動を表す方程式を，確率過程を用いて表そう．

バクテリアの運動のルール

- Run・・・同じ速度で進み続ける
- Tumbling・・・進む速度を変える

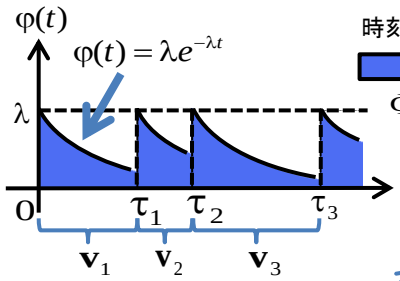
これら2種類の運動を組み合わせて運動する．

参考文献

Othmer, Dunbar, Alt
Models of dispersal in biological systems
Journal of Mathematical Biology 26 (1988) 263-298
Hillen, Othmer
The diffusion limit of transport equations derived from velocity-jump process
SIAM J. Appl. Math. 61 (2000) 751-775

②バクテリアの運動の仮定

進む速度を変える確率をパラメータ λ のポアソン過程で与える．



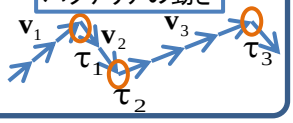
$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \cdots$ で速度を変える．

時刻 t で速度を変える確率は

部分の面積

$$\Phi(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau$$
$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

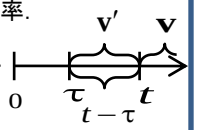
バクテリアの動き



③方程式の導出

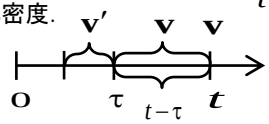
$Q(\mathbf{v},t)$: 時刻 $t=0$ で速度 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ の状態で出発し，ちょうど時刻 t で速度が変化し，$\mathbf{v}$ になる確率．

$$(*)\ Q(\mathbf{v},t) = \delta(\mathbf{v})\delta(t) + \int_0^t \int_V \lambda e^{-\lambda(t-\tau)} T(\mathbf{v},\mathbf{v}') Q(\mathbf{v}',\tau) d\mathbf{v}' d\tau$$



$p(\mathbf{v},t)$: 時刻 t で速度 $\mathbf{v}$ である確率密度．

$$p(\mathbf{v},t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} Q(\mathbf{v},\tau) d\tau$$



$(*)$ を代入

$$p(\mathbf{v},t) = e^{-\lambda t}\delta(\mathbf{v}) + \int_0^t \int_V \lambda e^{-\lambda(t-\tau)} T(\mathbf{v},\mathbf{v}') p(\mathbf{v}',\tau) d\mathbf{v}' d\tau$$

t で微分

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\lambda p + \lambda \int_V T(\mathbf{v},\mathbf{v}') p(\mathbf{v}',t) d\mathbf{v}'$$

ボルツマン方程式に代入 $\frac{\partial p}{\partial \tau} + \nabla\cdot\mathbf{v}p = \Re$

$\Re$: 確率密度 p が確率過程によってどのように変化するのかを表す項

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{v}p = -\lambda p + \lambda \int_V T(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{v}') p(\mathbf{x},\mathbf{v}',t) d\mathbf{v}'$$

運動による移動の効果を表す項

$u = \frac{\mathbf{v}}{s},\ \xi = \frac{\mathbf{x}}{L},\ \tau = \frac{t}{\sigma}$ として，無次元化する

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tau} + \left(\frac{s}{L}\right) u\cdot\nabla\tilde{p} = -\lambda\tilde{p} + \lambda\int \tilde{T}(\xi,u,u')\tilde{p}(\xi,u',\tau) du'$$

$$\left[\ \tilde{p}(\xi,u,\tau) = p(\xi L, us, \sigma\tau)\ ,\quad \tilde{T}(\xi,u,u') = T(\xi L, us, u's)\ \right]$$

バクテリアの拡散，ドリフト，Runの平均時間は次のようになる．

$$\tau_{DIFF} \approx \frac{L^2}{D} = \frac{L^2\lambda}{s^2} \left(\begin{array}{l} D \text{ 拡散係数} \\ D \approx O(s^2/\lambda) \end{array}\right),\quad \tau_{DRIFT} = \frac{L}{s},\quad \tau_{RUN} = \frac{1}{\lambda}$$

スケールを決める．

$\tau_{RUN} \approx O(1)$

$\tau_{DRIFT} \approx O(1/\varepsilon)$

$\tau_{DIFF} \approx O(1/\varepsilon^2)$

$\tau_{RUN} << \tau_{DRIFT} << \tau_{DIFF}$

$\tau_{DRIFT} = \frac{L}{s} \approx O(1/\varepsilon)$ より，

バクテリアの運動を拡大して，細かな動きを見ていることになる．

$\sigma = \tau_{DIFF}$ と仮定すると，

$$\varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial \tau} + \varepsilon v\cdot\nabla p = -\lambda p + \lambda\int_V T(\xi,v,v') p(\xi,v',\tau) dv'$$

摂動展開を行う

$$P(\xi,v,\tau) = \sum_{i=0}^{k} P_i(\xi,v,\tau)\varepsilon^i + \varepsilon^{k+1} P_{k+1}(\xi,v,\tau)$$

を代入

左辺と右辺の ε のオーダーを比較すると，次の方程式を得る．

$$\begin{cases} \varepsilon^0 : \mathbf{L}p_0 \equiv -\lambda p_0 + \lambda\int_V T(v,v') p_0(\xi,v',\tau) dv' = 0 \\ \varepsilon^1 : \mathbf{L}p_1 = v\cdot\nabla p_0 \\ \varepsilon^2 : \mathbf{L}p_2 = \frac{\partial p_0}{\partial \tau} + v\cdot\nabla p_1 \\ \quad\vdots \\ \varepsilon^i : \mathbf{L}p_i = \frac{\partial p_{i-2}}{\partial \tau} + v\cdot\nabla p_{i-1} \end{cases}$$

$$\left(\mathbf{L}p(\xi,v,\tau) = -\lambda p(\xi,v,\tau) + \lambda\int_V T(\xi,v,v') p(\xi,v',\tau) dv'\right)$$

ε^0 の方程式に着目すると，

$$\mathbf{T}p_0(\xi,v,\tau) = p_0(\xi,v,\tau)$$
$$\left(\mathbf{T}p(\xi,v,\tau) = \int_V T(\xi,v,v') p(\xi,v',\tau) dv'\right)$$

ここで，作用素 $\mathbf{T}$ について，次の条件を与える．

① $T(v,v') \geq 0$　② $\int_V T(v,v') dv = 1$　③ $\int_V\int_V T^2(v,v') dv' dv < \infty$

すると，Krasnosel'skiiの定理より，

p_0 は v に依存しないことがわかる．

作用素 $\mathbf{T}$ の条件を満たす $T(v,v')$ として，

$T(v,v') = \frac{1}{|V|}$ と与える．

ε^1 の方程式から

$p_1 = -\frac{1}{\lambda}(v\cdot\nabla p_0)$ を得て，

ε^2 の方程式から

$$\int_V \left(\frac{\partial p_0}{\partial \tau} + v\cdot\nabla p_1\right) dv = 0$$

を得るので，

$$\frac{\partial p_0}{\partial \tau} - \nabla\cdot(D\nabla p_0) = 0. \qquad \left(D = \frac{1}{|V|}\int_V \frac{v^2}{\lambda} dv\right)$$

④まとめ・今後の課題

中心差分の極限方程式が導出されたが，今回の導出のどの過程の効果によって表れたのかを考える．