ひまわりの葉序形成

明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻数学系　田中吉太郎

指導教官　三村昌泰

概要

葉序とは植物に見られる葉や種や花などの配置や並びかたのことである．ひまわりは種の並びに葉序が見られ，黄金比やフィボナッチ数に関係がとても深い．葉序と黄金比の関係は非常におもしろく，とても神秘的である．私の研究動機は葉序と黄金比の関係及びメカニズムを数学的に解明することである．S.Douady and Y.Couder ([1].[2]) はひまわりのパターンを物理実験を用いて再現することに成功した．彼らのアイデアを用いて新しいモデルを提案し，ひまわりの葉序のメカニズムにアプローチしていく．

1　序章

ひまわりの種の配列はとてもおもしろい．我々はひまわりから二本のらせんを観察することができる．一つは時計回りであり，他方は反時計回りである（図 1.1）．実は，これらの本数は連続するフィボナッチになる．また，種一つ一つの配置は黄金比によって与えられる 137.5 度の黄金角によって決められている．はたしてひまわりはどのようなメカニズムでこの神秘的なパターンを作っているのだろうか．このメカニズムを解明することが私の研究動機である．

S.Douady and Y.Couder ([1].[2]) は物理実験によりひまわりのパターンを再現した．電場をかけてあるシリコンオイルに，電荷を帯びた油滴を一定の周期を保ったままおとすことにより，油滴は特徴的に分布された．彼らはさらにそれをモデリングし、数値シュミレーションからひまわりのパターンを再現することに成功している．彼らのアイデアを用いて、我々は新しいモデルを二つ提案する．

第二章で「距離を測るモデル」，第三章で「ホルモンを使ったモデル」を提案する．本研究では、そのモデルを用いてひまわりのメカニズムにアプローチしていく．第二章では「距離を測るモデル」の導出とそれのシミュレーション結果を述べる．第三章では新しく

「ホルモンを使ったモデル」を提案する．この論文の目的は，これらのモデルでひまわりのパターンを構築するとともに，黄金比によってこれらのパターンが形成されることを確かめることである．我々の解析は総合的に数学に基づいている．

図 1.1　ひまわりのらせんパターン

http://www.worldproutassembly.org/archives/2007/08/the_mathematica.html　より引用

2　葉序と原基

らせんパターンは原基の配置によるものだと言われている．原基はとても小さい細胞で，茎頂で作られる．図 2.1 で G が茎頂であり，P が原基である．茎頂は茎の先端に位置し, 盛んに分裂する多くの細胞からなる分裂組織であり，形は円形になっている．原基は茎頂の周にある小さな突起のことで，後に葉や種や根や花などに進化し成長する部分である．

茎頂に現れる原基は植物の成長と共に次々に発生し，植物の体の各部分に分化していく．原基の位置は後の葉や種の位置を決定させているとされてるため，原基の配列を解析することによって，ひまわりの種の幾何学的な位置を調べることができると考えられる．その意味でひまわりの種の配置も葉序の一つと考えることができる．

原基の現れ方に見られる特徴が，それが種の位置に大きな影響を及ぼしている．原基は茎頂で発生するが，その発生する場所が成長したときにもっとも有益な位置にくるように茎頂に発生すると考えられている．葉になる原基であれば成長したときに互いに重ならないように発生し，種になる原基であれば，花の中にもっとも詰め込むことができるように

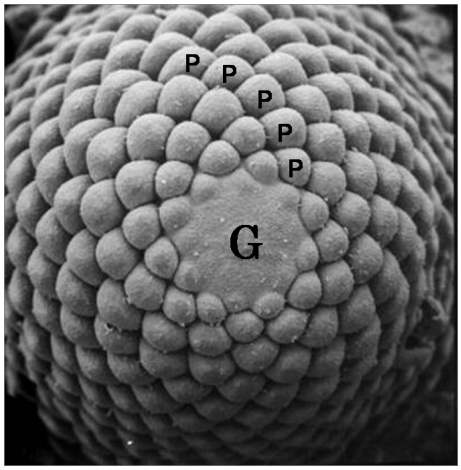


図 2.1　原基 P と茎頂 G

http://www.worldproutassembly.org/archives/2007/08/the_mathematica.html　より引用

発生する．

3　最遠地点探索モデル

3.1　モデル導出

ひまわりの茎頂付近の成長の模式図が図 3.1 である．原基は自ら動くことができないが，ひまわりが成長することによって真上から見ると，あたかも動いているかのように見える．（図 3.2）我々はこの原基の運動を等速直線運動し，この初速度を V とする．また、一つの原基ができてから次の原基ができるまでを T，茎頂の半径を R_0 とする．以上の V，T，R_0 がパラメーターとなり，時刻 nT の時の j 番目に発生した原基の位置は極形式を用いて，

$$X_j(n) = (R_0 + (n-j)VT)(\cos\theta_j, \sin\theta_j)$$

と表せる．ここで $0 \leq \theta_j < 2\pi$ とし，$X_1(1) = (1, 0)$ とする．j 番目と $j-1$ 番目の原基の偏角の差 $\varphi = \theta_j - \theta_{j-1}$ を開度と定義する．

距離を測るモデルでは，我々は新しい原基は今までに存在している原基と距離を測って，その和の逆数が一番小さくなる茎頂の周上から発生すると仮定する．そうすることで原基はもともと存在する原基から離れることができ，またもっとも有益な場所に成長する

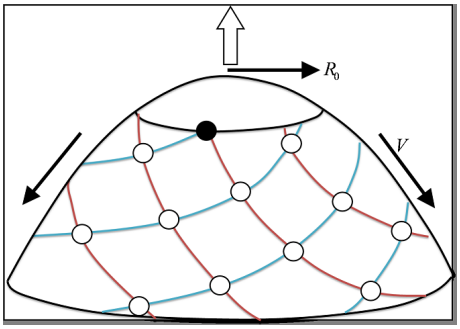


図 3.1　植物の成長の様子．頂上付近の色の付いた円形部分が茎頂．小さな丸が原基（黒丸が一番最近の原基）

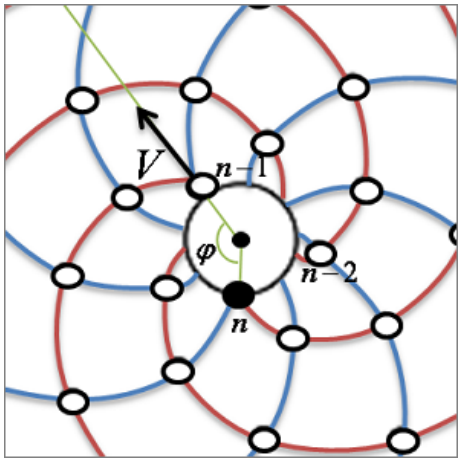


図 3.2　図 3 を上から見たときの様子．$\varphi = \theta_j\theta_{j-1}$ はある原基とその次の原基の中心角の差である．V は等速直線運動の初速度である．

ことができる．このモデルは

$$
\begin{aligned}
f(G, \theta_1, \cdots, \theta_n) &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\mid X_j(n) - X_n(n) \mid} \\
&= \frac{1}{R_0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\mid (1 + (n-j)G)(\cos\theta_j, \sin\theta_j) - (\cos\theta_n, \sin\theta_n) \mid}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

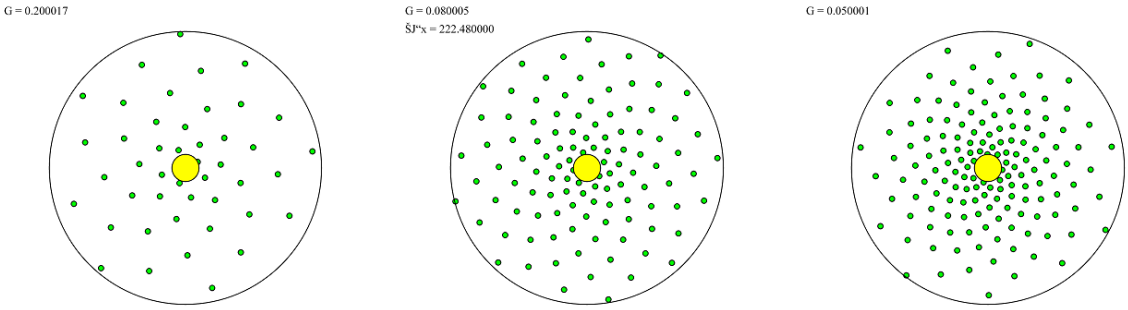
を最小にするような θ_n を求める最小値問題で表すことができる．θ_n は，n 番目にできる原基の偏角である．また，

$$G = \frac{VT}{R_0}$$

であり，式 3.1 から，この問題はパラメーター G だけに依存することがわかる．

3.2　シミュレーション結果

パラメータ G を動かしながらシミュレーションを行った．図 3.2 で緑色の円盤が原基であり，黄色の円盤が茎頂である．図 3.2 はひまわりによく似たパターンを示し，二つのらせんを確認することができる．このらせんの本数は時計回りと反時計回りで連続するフィボナッチ数である．ただしシミュレーション結果 (c) は連続するルカ数となる．また，開度は収束し，(a) と (b) でははは黄金角（$= 137.5\ldots$ ）に近い値となった．その様



(a)G=0.6→ 0.2 $\varphi = 137.592°$

(b)G=0.4→0.08 $\varphi = 137.520°$

(c)G=0.4→0.05 $\varphi = 99.432°$

図 3.3　シミュレーション結果．フィボナッチ数ひまわりとルカ数ひまわり

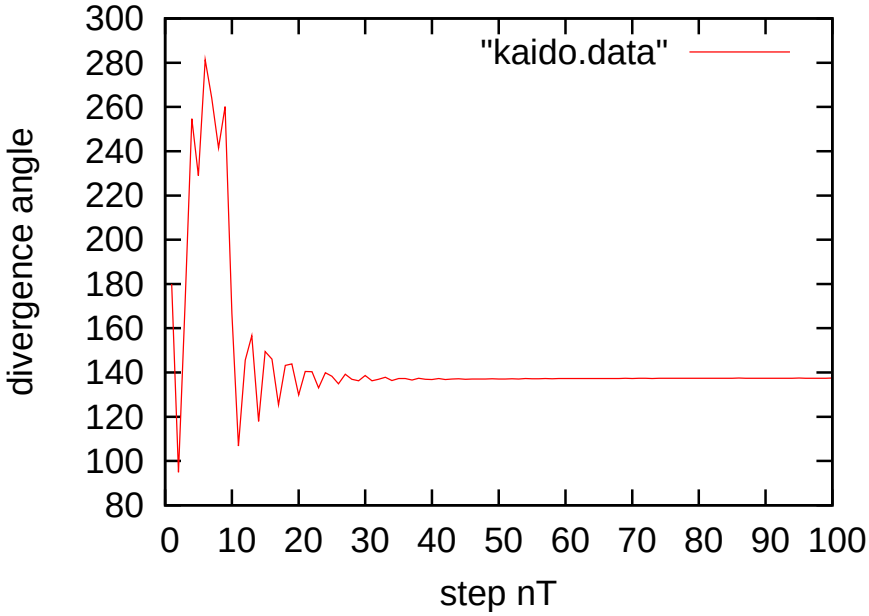


図 3.4　開度の変動と収束の様子

子が図 3.4 である．$step = nT$ で開度は $\theta_2 - \theta_1, \cdots, \theta_n - \theta_{n-1}$ までである．図 3.4 では $step = nT$ の時に，$\theta_n - \theta_{n-1}$ をプロトしている．

生物的な観点から，パラメーター G は成長を表すパラメーターだと考えた．例えば R_0 が一定だとするおと，G の値が大きいときは分子の VT が多いときである．原基ができて次の原基ができるまでに動く距離が大きいということである．これは 3 次元に戻して考

えたとき，より鉛直方向に成長しているということに対応している．つまり植物本体の成長を優先しているということになる．逆に，G の値が小さい時は，VT が小さいということであり，原基を密に分布させることになる．これは植物自体の鉛直方向に成長するのを抑えて，新しい原基を次から次へと発生することに対応する．つまり，植物の成長よりも自分の子孫を増やすことを優先することになる．

このモデルから，G の値は極めて小さいときに，ひまわりのパターンが再現されることがわかった．自分の成長よりも子孫を残すことを優先したときに，適切な条件下のもとで，ひまわりは二重らせんや黄金角をつくっているということがわかった．距離を測るモデルからひまわりのらせんパターンと黄金角を再現できたといえる．

4　ホルモンモデル

我々は距離を測るモデルからひまわりによく似たパターンを再現することができた．しかしながら，ひまわりが距離を測っているのだろうか．ひまわりが距離を測るような高度なことをしているとは到底考えられない．したがって距離を測るモデルはモデルとしては不十分である．そこで，より現実的な新しいモデルを提案する．ひまわりは距離を測る効果と同じ効果を別の何かで代替しているのだと考えた．ひまわりには距離を測るのと同じ効果が存在するとし，それを抑制しあうホルモンであるとする．もし，仮に実験的にそのようなホルモン物質があることが提唱されたら，前のモデルよりもより自然である．

我々はホルモンモデルでは，原基はその抑制物質（ホルモン）を拡散しながら成長し，新しい原基はそのホルモン濃度がもっとも少ない茎頂周上の点から発生すると仮定する．n 番目の原基の場所を決めるとき，このホルモンモデルは

$$\begin{cases} X_j(n) = (R_0 + (n-j)VT)(\cos\theta_j, \sin\theta_j) \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} = D\triangle S + \sum_{j=1}^{n-1} \delta(X - X_j(n)) - bS \end{cases}$$

S が茎頂上で最小となる点 $R_0(\cos\theta_n, \sin\theta_n)$，$(0 \leq \theta < 2\pi)$ を見つける

ように記述することができる．関数 $S(x,t)$ は抑制ホルモンの時刻 t における場所 x の濃度である．そして δ はデルタ関数である．4.1 はこのモデルの模式図である．現在このモデルに対してシミュレーションを行い，距離のモデルと同様の結果が得られるか検討中である．

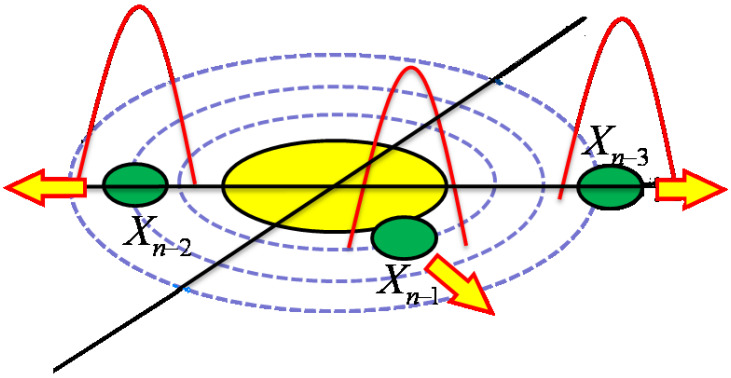


図 4.1　ホルモンモデルの模式図

5　黄金角

5.1　方程式

距離を測るモデルのシミュレーションから，ひまわりから黄金角が現れることが分かった．種の開度が収束したことから，黄金角は定常解のようなものだと考えた．この章では，距離を測るモデルから数学的に黄金角を導き出すことを試みる．

(3.1) で定義した関数 f を θ に関して偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial\theta}f(G,\theta,\theta_j,n)=\frac{1}{R_0}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{A_j\sin(\theta_j-\theta)}{(A_j^2+1-2A_j\cos(\theta_j-\theta))^{\frac{3}{2}}}$$

である．また

$$A_j=1+(n-j)G$$

とした．求めるべき θ は式 (3.1) を最小化するものであるから，考える θ に関する方程式は

$$\frac{\partial}{\partial\theta}f(G,\theta,\theta_j,n)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{A_j\sin(\theta_j-\theta)}{(A_j^2+1-2A_j\cos(\theta_j-\theta))^{\frac{3}{2}}}\quad=0 \tag{5.1}$$

となる．この方程式にシミュレーションからわかった条件を加えていく．シミュレーションからわかったことは

1. G の値をだんだん小さくしていったときに黄金角が現れたので,G の値は 0 に近づいていく．

2. θ_j は種が増えていくと次第にある角度 θ_0 に収束する.
3. θ_0 は種が出てくる折々で関数 f の値が最小になる時の中心角であり, 式 (3.1) に代入したら極値をとると考えられる.
4. n − 1 個目まで中心角が θ_0 に収束してくると, 次に現れる中心角も θ_0 に収束するとする.

これらの事実を数式を用いて表現すると

1. $G \to 0$ すなわち,$A_j \to 1$
2. $\theta_j = j\theta_0$
3. $\frac{\partial}{\partial\theta} f(G, \theta, j\theta_0, n) = 0$
4. θ=nθ_0

となる．これらの条件を式（5.1）に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial\theta} f(G, n\theta_0, j\theta_0, n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin((n-j)\theta_0)}{(2 - 2\cos((n-j)\theta_0))^{\frac{3}{2}}} = 0 \tag{5.2}$$

となる.

これらの条件を満たす θ_0 を求めよう．ただしこの θ_0 は黄金角であることが予想される.

この方程式（5.2）は $j = 1, 2, \ldots, n-2, n-1$ の和を考えなければならないのだが，全ての和を考えるのは難しい．そこで少し工夫をこらす．3 章の数値シミュレーションを振り返ると, 黄金角が出てきたのは G の値が小さくなったときである．これは初速度 V が小さくなることを意味し，原基が茎頂からあまり離れないことを意味する．したがって定常解として黄金角が出てくるときの新しい粒子の場所は，茎頂付近の近傍つまり存在する種の中でもっとも最近の物（$j = 1, 2, \ldots, n-2, n-1$ のうちで $n-1$ に近いもの）が場所を決めていると考えた．また，遠くにあればあるほど，新しい原基に影響が少なくなると考えることは自然である．茎頂から近い種から順に種の個数を２つ，３つ，４つと増やしていきながら計算をしていった.

5.2 近傍における原基５つの定常解

茎頂近傍種５つまで計算をしたので，種５つの計算結果だけ記す．(5.2) 式に j = n − 5, n − 4, n − 3, n − 2, n − 1 を代入し，5 倍角の公式を用いて,$\cos\theta_0 = t$ と置き,

分子だけを考えると

$$
\begin{aligned}
&(16t^4-12t^2+1)(8t^2(1-t)(1+t))^{\frac{3}{2}}((1-t)(2t+1)^2)^{\frac{3}{2}}(2(1-t)(1+t))^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\\
&+(8t^3-4t)(-16t^5+20t^3-5t+1)^{\frac{3}{2}}((1-t)(2t+1)^2)^{\frac{3}{2}}(2(1-t)(1+t))^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\\
&+(4t^2-1)(-16t^5+20t^3-5t+1)^{\frac{3}{2}}(8t^2(1-t)(1+t))^{\frac{3}{2}}(2(1-t)(1+t))^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\\
&\quad+2t(-16t^5+20t^3-5t+1)^{\frac{3}{2}}(8t^2(1-t)(1+t))^{\frac{3}{2}}((1-t)(2t+1)^2)^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}\\
&+(-16t^5+20t^3-5t+1)^{\frac{3}{2}}(8t^2(1-t)(1+t))^{\frac{3}{2}}((1-t)(2t+1)^2)^{\frac{3}{2}}(2-2t^2)^{\frac{3}{2}}=0
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

を得る．この方程式を数値解析的に解くと，およそ $t=-0.719\ldots$ という解を得ることができる．このとき中心角はおおよそ,$\theta_0=136.03\ldots$ となり, 黄金角との誤差は約１度までとなった．式 (5.3) を関数にしたものを以下に載せておく．

種５つの計算結果は種の個数２つの計算結果よりも，３つの計算結果よりも，４つの時よりも中心角は黄金角に近づいた．近傍付近の種の個数を増やしていけば精度は増すことが予想ため一般的な n に対しても計算を行っていきたい．

6　まとめ

今回の研究では, 物理実験をモデルに数値シミュレーションを行い、ひまわりの螺旋パターンの再現を行った．合理性や適切性を追求した条件のもとに、ひまわりは黄金角を使って、螺旋模様を作っていることがシミュレーションから確かめることができた．植物が距離を測りながら新しい原基の場所を決めているとは考えづらいが、植物は進化する過程で成長に関するパラメーター G に沿うような成長の仕方がもっとも合理的でかつ、その条件は黄金角がもっとも効率が良いということを見つけたのではないかと考えた．

7　課題と展望

我々はは距離を測るモデルとホルモンモデルを定式化することができた．また，距離を測るモデルの数値シミュレーションは大方おえてることができた．しかし，この両モデルが同値関係にあることを証明することは今後の課題である．

同値関係の証明をした後に本研究の目標の一つである，黄金角の証明をすることも課題の一つである．最後に，ホルモンモデルの数値シミュレーションも行わなければならない．課題は山積みである．

参考文献

[1] S.Douady and Y.Couder, *Phyllotaxis as a Dynamical Self Organizing Process Part 1:The Spiral Modes Resulting from Time-Periodic Iterations*, J. Theor.Biol.(1987) **178**, 255–274.

[2] S.Douady and Y.Couder,*Phyllotaxis as a Self- Organized Growth Process*, Vol.**68**, no.13, 1992.