

メトロノームの同期現象 +

宮崎大学 工学部 情報システム工学科 伊達 章

1 はじめに

1日のリズム, 1週間のリズム, 1年のリズム, 世の中にはいろいろなリズムがある. 天体の運動, 呼吸, 時計, もっと速いのはコンピュータのクロックシグナル, 我々はいろいろなリズムに囲まれて生活している. ここでは単純に, ほぼ一定の周期で同じ出来事が繰り返す現象を, リズム現象と呼ぼう. 一つのリズムだけを考えて同じ出来事が繰り返すだけであるが, リズムとリズムがお互いに影響し合うと, そこに同期という現象がおこる点が面白い. 神経の興奮, 心臓の鼓動など, とくに生体にはリズムが自発的に揃う「引き込み」と呼ばれる現象がある. このような自然発生する「リズム」とその同期は, 生活の中にある身近な材料を用いて確認できる [17, 24, 36]. 研究集会「偏微分方程式と現象」では, 特別実験講座として, 小型のメトロノームを実際に触って実験できる環境を提供し, メトロノームの同期現象を紹介した (図1左). 本実験は, 数万円程度の予算で, 手間もかからずインパクトのある実験ができる. 比較的単純な数式を扱うだけで, 同期のしくみについて直観的な理解ができる点もよい. 会場では, ペットボトル振動子 (図1右) についても実物を用意し実験することも考えたが, メトロノームの場合と比較し, 手間がかかる割に得られる効果が少ないため割愛した. そのほかの身近な材料を使っても振動子を作成できる. 興味ある読者には, 文献 [24, 36] をおすすめしたい.



図1: メトロノームの同期現象 (左), ペットボトル振動子 (右)

以下, 本稿は, 単純な数理モデルを使い同期現象を理解する最短経路の一つを紹介する. できれば, 高校生でも内容が理解できるようにしたい. 内容が初歩的すぎるという読者には

文献 [18] をおすすめする．研究集会においては，同期現象と脳の数理モデルに関係する話を少しだけ話そうとした為，タイトルの最後に「+」が付いている．会場では，神経振動子場の研究について紹介した [22]．本稿でも，少しだけ，脳内の情報表現とリズム現象について私見を述べる．

2 メトロノームの同期現象

図1左の写真は，台の上に置かれた4台のメトロノームが動いている様子を，撮影したものである．メトロノームの実物は，音楽の授業時間に見たことがあるとは思いますが，簡単に説明しておこう．メトロノームは一定の間隔で音を刻み，楽器演奏を練習する際に，速さを合わせるために使われる．メトロノームには一本の「腕」がついており，腕には，おもりがついている．この腕が左右に振れるたびに「カチッ」という音が出る．おもりの位置を上下に調整することで，腕が左右に振れる速さが調整できる．

図1左のメトロノームは機械式で，ぜんまいに貯められているエネルギーが小出しに使われることで「一定の間隔」で音を刻む．しかし，同じ型番のメトロノームを2台購入し，おもりの位置を同一位置に設定しても，一台一台にほんのわずかな違いがあるため，「同一の間隔」で音を刻むことはない（もちろん，ほぼ同一の間隔で音を刻む）．例えば，一分間に200回のリズムを刻むようにおもりの位置を設定した2台のメトロノームを机の上に置き，同一の「腕の振りの位置」からスタートさせてみよう．2台のメトロノームが刻む時間間隔にわずかのズレがあるため，そのズレが拡大し，揃って腕を振るわなくなることは30秒も観察すれば判明する．

次に，水平方向に動く不安定な台の上に，2台の機械式メトロノームを載せて，同様な実験を試みよう（図2）．すると，あら不思議，2つのメトロノームが同期する．さすがに紙面上ではその面白さがうまく伝えられない．YouTube (<http://www.youtube.com>) 上には，いくつもの動画が投稿されているので，それらの動画を見て確認していただきたい（キーワードとして「メトロノーム」「同期」を用い動画を検索すればよい）．

図2の写真では大きさは分からないと思うが，実験に使用したのは，小型のものである．私が購入したメトロノームはドイツ Wittner 社の taktell piccolino というもので，amazon.co.jp から1台5千円程度で購入できる（2010年12月時点）．

3 ブランコと振り子時計

メトロノームの腕は周期的に反復運動をするが，糸におもりをつけた振り子やブランコの反復運動とは少し違う．単に，糸におもりをつけた振り子やブランコの場合，最初に大きく

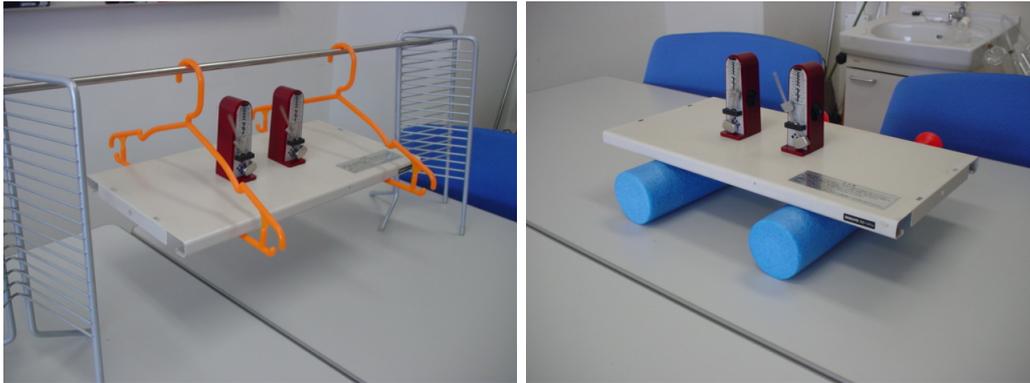


図 2: メトロノームを利用した同期現象の簡単な実験．ハンガーでぶら下げた台の上にメトロノームを置いた状態（左），2本の円筒状の物体の上に台を置き，その上にメトロノームを載せた状態（右）．

振らせば大きく振れ，小さく振らせば小さく振れる（あたりまえだ！）．メトロノームや振り子時計の場合，指を使い，力づくで腕を大きく振らせても，ほんの少し時間が経てば，またもとの振れ幅に戻り，振れ続ける．つまり，外乱に左右されない，安定したリズムを持っている．同期現象はこのようなタイプのリズムに見られる．

機械式の振り子時計は，ぜんまいに蓄えられたエネルギーを小出しにすることで，長い間，安定したリズムを刻むことができる．これは，外界から注入されたエネルギーが振り子の運動・空気摩擦に変換され外界に逃げていっている，エネルギーの流れの中にシステムが置かれている，と解釈することができる．こういうシステムは開放系と呼ばれており [17,36]，「エネルギーや物質の流れの中に置かれたシステムでは安定なリズムが持続する」とも言われる．

4 振動子を用いた同期現象の数理モデル化

早く先に進もう．同期現象をどう理解するか．これを考える．

4.1 一つのリズムのモデル化

振り子の動きを，腕の質量などなど運動方程式から考えていたのでは，式が複雑になる割に，同期現象の理解が進むかどうか怪しい．そこで，周期的に同じ事が繰り返す現象を，角速度 ω で等速円運動する物体と同一視して単純化して考えよう（メトロノームを上から見ると，腕の先端が一直線上を往復運動している．それは等速円運動をしている物体を真横

から観測したときと同じではないか！)。

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (1)$$

こういう動作をするものを振動子とよび、 $\theta = \theta(t)$ は振動子の位相と言う。もちろん ω は時間 t に依存しない定数である。位相 θ の値は $0 \leq \theta < 2\pi$ で定義される。これが一つの振動子である。右端に腕が振れる時を位相 0 とすれば、左端に腕が振れる時が位相 π となり、こうして、1 台のメトロノームの動作が数理モデル化できた。

4.2 2 つの振動子の相互作用：蔵本モデル

さっそく二つの振動子が相互作用する場合を考える。微分方程式は物事の変化や発展を語るのに欠かせない。天下りで申し訳ないが、以下の連立微分方程式を考えよう

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 - 0.05(\sin(\theta_1 - \theta_2)) \quad (2)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 - 0.05(\sin(\theta_2 - \theta_1)) \quad (3)$$

ここで θ_1, θ_2 は、それぞれ、振動子 1、振動子 2 の位相、 ω_1, ω_2 は、それぞれ、振動子 1、振動子 2 の角速度である。ここで角速度 ω_1, ω_2 は、固有振動数、固有周波数とも呼ばれるが、以後、自然周波数と呼ぶことにする。時間 t において、 θ_1 がこれからどう変化するかは $\theta_1(t), \theta_2(t), \omega_1$ だけに依存することを式 (2) は意味している。式 (2, 3) は、それぞれ、右辺第 2 項がなければ式 (1) と同じで、お互いに影響を受けず独立に等速回転運動をする物体を記述する式になる。これらの式は位相縮約理論によって導かれる位相方程式であり、この単純な式にたどり着くのは易しくない。それに、このモデル化が、どれほど適切か、必要であれば、検証する必要がある。この辺の事情については例えば文献 [10] が分かりやすい。

まず $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ という単純な場合を考えよう。2 台のメトロノームが動く速さを同一になるようおもりの位置は設定されている。このとき、 $\theta_1 - \theta_2 > 0$ の場合。つまり、振動子 1 が振動子 2 より少し先に進んでいる場合を考えてみよう。 $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 > 0$ とおくと、式 (2) の右辺は $\omega_1 - 0.05 \sin \Delta\theta$ となり、 $\sin \Delta\theta > 0$ であるので、振動子 1 は、相互作用がない場合の自然周波数 ω よりも小さい速さで回転するようになる。同様に考えると、振動子 2 は、自然周波数 ω よりも大きい速さで回転するようになる。その結果、振動子 1 と振動子 2 は、速さの差が小さくなるように動くため、互いに引き合うようになる。そしてある時点で $\theta_1 = \theta_2$ になると、互いに相互作用項は消え、以後永遠に 2 台ともに、同位相で等速円運動を続けることがわかる。この様子を図 3 に示した。図 3 左には、横軸に時間、縦軸にそれぞれの振動子の位相が図示されている。図 3 右には、横軸に時間、縦軸に 2 つの振動子の位

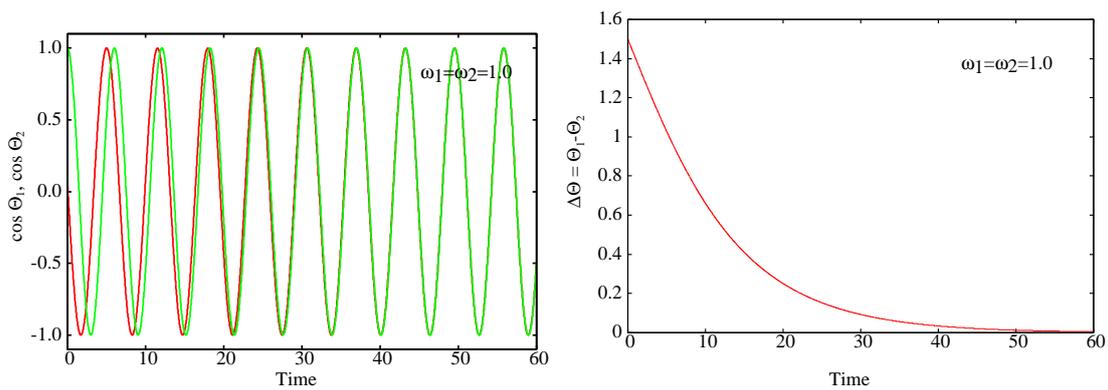


図 3: 同一の自然周波数をもつ場合: $\omega_1 = \omega_2 = 1.0$. $k = 0.05$. 初期値 $\theta_1 = 1.5, \theta_2 = 0.0$. 位相差 $\Delta\theta = 0$ の状態に収束する.

相差が図示されている. 時間が経ったあとの位相差がほぼゼロの状態を平衡状態とよぼう. 途中でどちらかの振動子の運動を強制的に一時停止させて同位相の状態を崩しても, また同位相の状態にもどるため, この平衡状態は安定平衡状態であると言う. $k = 0.05 > 0$ の場合, 位相差 0 の状態が安定平衡状態になっていることは, 簡単な考察で理解できる (図 4). $k < 0$ の場合, 同様に考察すると, 互いに反発し合い, 位相差が π の状態が安定平衡状態になることがわかる. 以上の事情については, 文献 [17] に明瞭な記述があるので, その一部を図 5 として引用させて頂こう.

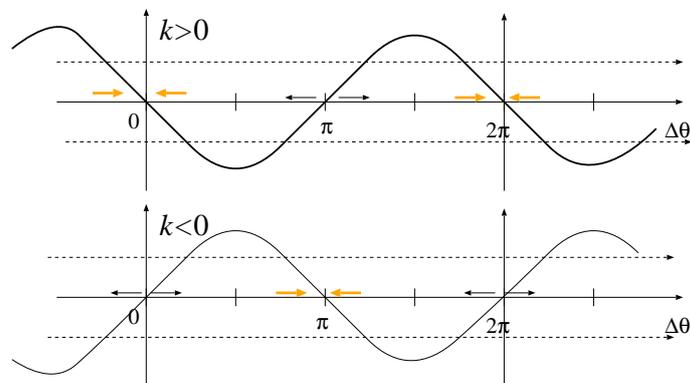


図 4: 位相差の時間発展. 縦軸は $\Delta\theta = \omega_1 - \omega_2$ (点線), $-2k \sin \theta$ をプロット. $\Delta\theta > -2k \sin \theta$ の領域では, $\Delta\theta$ が大きくなる方向に動く.

現実には, たとえば, 2 台のメトロノームの自然周波数を同じにすることはできない. つまり, $\omega_1 \approx \omega_2$ には設定できるが, $\omega_1 = \omega_2$ にはできない. この状況を考えよう. 式 (2) から式 (3) を引き算したものを考えると (以下, 面倒なので $0.05 = k$ と記述し, 一般化して

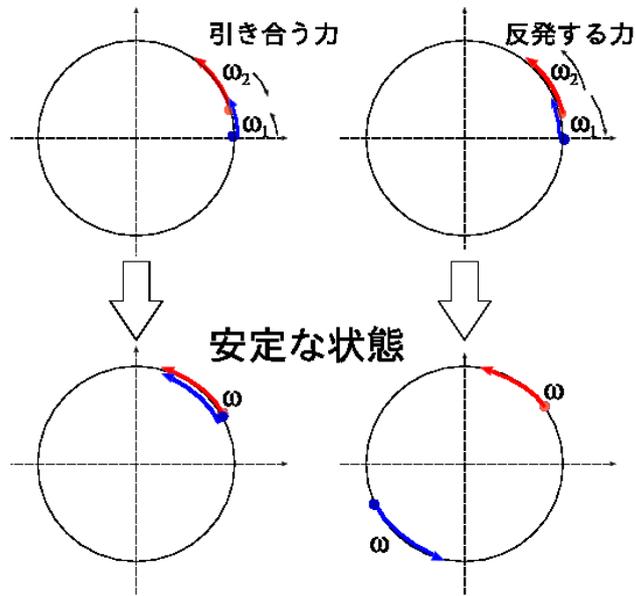


図 5: 「相互作用する二つの振動子間の問題は、円周上を回転運動しながら相互作用する 2 個の粒子の問題に似ている。二つの振動子が同一の場合には、相互作用が引力なら両者の位相は最終的に一致し、斥力なら 180° の位相差を保って安定化する。」(文献 [1] p.135 より)

記述する)、位相差の時間発展に関する方程式

$$\frac{d}{dt}(\theta_1 - \theta_2) = (\omega_1 - \omega_2) - 2k \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad (4)$$

が得られる。 $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ とおくと、

$$\frac{d}{dt}\Delta\theta = (\omega_1 - \omega_2) - 2k \sin \Delta\theta \quad (5)$$

である。 $-1 \leq \sin \Delta\theta \leq 1$ であるので、 $|\omega_1 - \omega_2|$ が $|2k|$ より大きければ平衡状態は存在しないことが分かる(つまり、このモデルの場合、2つの振動子の自然周波数の差が相互作用の大きさに比べ大きい場合は同期は起こらない)。位相差の平衡状態が存在する場合、 $\frac{d}{dt}\Delta\theta = 0$ であるので、そこでは位相差 $\Delta\theta$ は

$$\sin \Delta\theta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2k} \quad (6)$$

を満たす。位相差 $\Delta\theta$ が、ほぼ 0 の場合は $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$ と書けるので

$$\Delta\theta \approx \frac{\omega_1 - \omega_2}{2k} \quad (7)$$

と書ける。したがって、たとえば、 $\omega_1 = 1.05, \omega_2 = 1.00, k = 0.05$ であれば、

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 \approx \frac{\omega_1 - \omega_2}{2k} = \frac{0.05}{0.1} = 0.5 \quad (8)$$

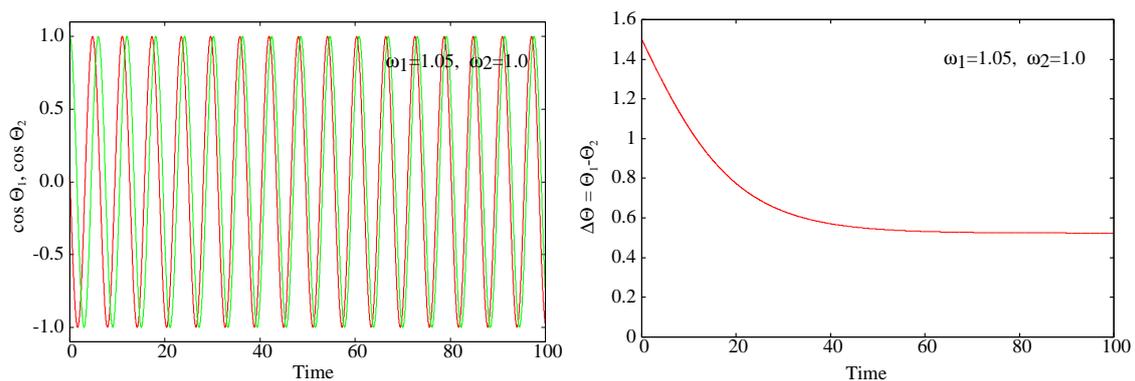


図 6: 二つの振動子の自然周波数が、ほぼ同じ値をもつ場合： $\omega_1 = 1.05, \omega_2 = 1.0$. $k = 0.05$. 初期値 $\theta_1 = 1.5, \theta_2 = 0.0$. 位相差 $\Delta\theta = 0.5$ の状態に収束する .

と、ある一定の位相差を保った状態が平衡状態になっていることがわかる . 図 6 にコンピュータで解いた結果を示す (図の読み方は図 3 と同じである) .

実際に 2 台のメトロノームの自然周波数をほぼ同一に設定し、適当な位相差から動作させても、2 台のメトロノームは同期する . ここで、人間の目には、位相差ゼロで同期しているように見えるが、1 秒間に 60 コマ程度撮影できる高速撮影できるカメラで確認すれば、2 台のメトロノームに位相差があることが確認できる . つまり、2 つの振動子がある位相差を保ったまま等速円運動している状況と同じであることがわかる .

$|\omega_1 - \omega_2|$ が $|2k|$ より大きければ平衡状態は存在しないことも確認しておこう . $\omega_1 = 1.2, \omega_2 = 1.0, k = 0.05$ のとき、 $\omega_1 - \omega_2 = 0.2 > 0.10 = 2 \times 0.05$ となり、この条件を満たす . 数値実験した結果を図 7 に示す .

4.3 コンピュータシミュレーションについて

コンピュータシミュレーションは簡単にできる . せっかくの機会なので、その方法についても述べておこう . 上記の連立微分方程式をシミュレーションを数値計算用の言語 octave で書いたプログラムを以下に示す . 適当なエディタでコードを入力し適当なファイル名 (たとえば `metronome.oct`) で保存し、octave で実行すれば、簡単に上記の結果が得られる .

```

1 #
2 # metronome.oct
3 #
4 global omega1 omega2 k;
5
6 k = 0.05;
7 omega1 = 1.05;
8 omega2 = 1.00;
9
10 function dx = metro(x,t)
11   global omega1 omega2 k;

```

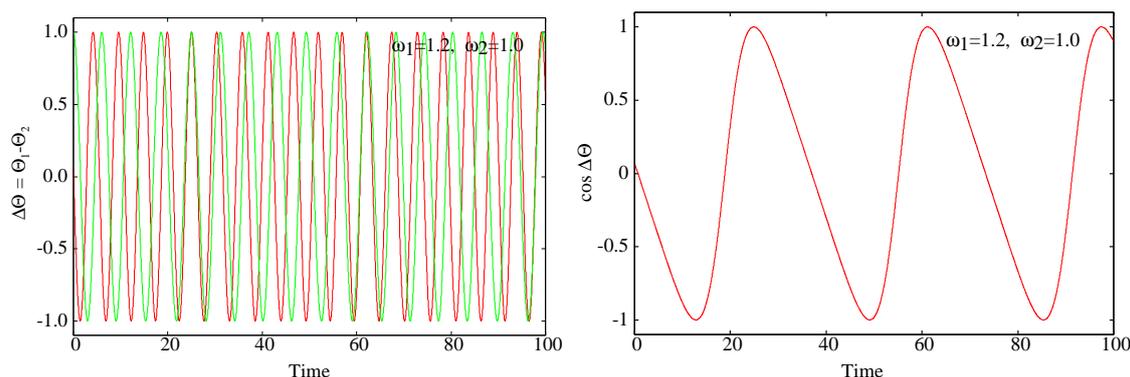


図 7: 二つの振動子の自然周波数が異なる値をもつ場合： $\omega_1 = 1.2, \omega_2 = 1.0$. $k = 0.05$. 初期値 $\theta_1 = 1.5, \theta_2 = 0.0$. 位相差 $\Delta\theta$ は収束しない .

```

12 dx(1) = omega1 - k*sin( x(1) - x(2) );
13 dx(2) = omega2 - k*sin( x(2) - x(1) );
14 end
15
16 t=linspace(0,100,1000);
17 x=lsode("metro",[1.5; 0.0],t); # [1.5;0.0] are initial values for theta(1) and
    theta(2)
18 plot( t,cos(x(:,1)), "r;theta1;"); # theta1 is plotted in red line
19 xlabel ("t");
20 ylabel ("cos_theta1, cos_theta2");
21 hold on
22 plot(t,cos(x(:,2)),"g;theta2;"); # theta2 is plotted in green line
23 pause
24
25 clf
26 plot( t, x(:,1)-x(:,2) ); # see the phase difference
27 xlabel ("t");
28 ylabel ("delta_theta");
29 pause

```

ここまでたどり着けば，100 個くらいの振動子が相互作用をする回路のコンピュータシミュレーションも難しくない。octave では遅いかもしれないので，その場合は，GNU Scientific Library (GSL) を使用した C 言語でコードを記述することをお勧めする。

5 考察：脳の情報処理とリズム現象

研究集会の会場では三村昌泰教授より「脳研究の現状」について問われた。その場では困り果てて，とっさに大学 1 年生向けに作った手持ちのスライドを使い，fMRI を利用した脳研究の難しさについて言及した。本節では脳の情報処理とリズム現象に関するテーマについて，論旨が明快で読みやすい解説記事や論文と，いくつかの研究テーマについて紹介したい。

5.1 情報表現と計算

「脳内における情報表現と計算」は最も興味あるテーマである（読みやすい一般向けの記事として文献 [1, 2, 25–29] がある）。中でも、記憶の情報表現は面白い。脳の動作原理、「脳の中でどういう計算がおこなわれているのか」を知るための研究の入口は情報表現である。

動物・人間を使った実験的アプローチでは、ニューロン（神経細胞）の活動を計測し、脳内で、ある瞬間瞬間どういう情報表現が実現されているかを調べる。個体の置かれた環境に依存し、時間とともに、その情報表現がどう変化していくのか、できれば、それを知りたい。地道な研究の一つは、微小電極を脳に刺し、個々のニューロンの活動を計測することである（ニューロンの反応選択性を調べる方法 [19, 20, 23]）。観測されるニューロンの反応選択性は、脳内に形成されている神経回路に依存する。神経回路は日々変化している（これを神経回路の学習・記憶という）。実際には、莫大な数の細胞の繋ぎ目（シナプス、細胞間の伝達効率）が、それぞれ日々少し変化しているだけなので、実験的に、例えば、自分の母親の顔がどう記憶されているか、今日起こった新しい出来事をどう記憶しているのか、その情報表現の本質をとらえるのは難しい。この辺について、大きなブレークスルーはないので（と言うと怒られるかもしれないが）、20年以上前に書かれた解説記事でも良質のものは今でも変わらず面白い [1–3]。

こういう状況では数理モデルは、本来、強い力をもつはずである。実際、1960年代後半から10年間の間に提案された、自己組織化（教師なし学習）モデル [31, 35]、連想記憶モデル [3, 11, 15] は、いまでも学習・記憶の強力なモデルである。しかし、これらと同等クラスのインパクトの大きいプロトタイプの数理モデルは出現していないように思う。インパクトのある単純な数理モデルを提案することは難しいことなのだろう。

5.2 神経回路網のリズム現象

何が克服されないといけないかは認識されており、誰もが発見・発明したい数理モデルがある。それは、物事の関係の表現についての「結びつけ問題（binding problem）」に関するものである [7, 16, 26, 27, 33, 34]。脳は物事を階層的に表現している。このことに対してほとんどの研究者は同意すると思うが、では脳内で、具体的に、どのような階層的な情報表現が実現されているのか、部分と全体の関係をどう表現しているのか、について問われると、「よく分からない」としか答えようがない。そこには神経活動の時間関係（リズム現象）が利用されていると信じられており [19, 26, 27, 34]、本稿のテーマであるリズム現象が関係してくる。これについて少しだけ説明を試みよう。

たとえば、目の前に「りんご」が1個あるとする。このときの脳内表現を考えよう。たと

えば「りんご」にだけ反応するニューロンが発見されているとして、百歩譲って現在の神経科学で「りんご1個の表現がわかっている」としよう。次に、「りんごが3個置いてある」状況を想像してみよう。このとき、脳内でどういう表現が実現されているかは、りんご1個の研究結果から、どう類推できるだろうか。「りんごニューロンは脳内に多数あり、興奮するニューロンの数が増える」だろうか。では、りんご市場に行き、数百個のりんごを見る場合、1個のりんごを見るときより何倍も脳は興奮している（活性化！）のだろうか。3個のりんごを見ている場合、3個は別々のりんごとして認識されている。その「別々」という概念は、どう表現されているのだろうか。りんご市場で数百個のりんごを見ているときは、「りんご市場」という概念の表現が実現されており、りんご1個と3個の関係とはまた別の関係で表現されていると思われる。こういう単純なことが、さっぱり分からないのが現状である [21]。

物事は、多数のニューロンの時空間的な興奮発展パターンに表現されていると考えられている。したがって、多電極により記録されたデータの解析や、解析する手法の研究が活発におこなわれている（例えば [4-6, 8, 30]）。そこでは数理の力が脳研究に生かされているが、数理の力は、脳研究においてデータ解析のみに効果があるわけではない。式(2,3)を介し、2台のメトロノームが同期する現象を直観的に理解できるように、動作原理を記述する大上段に構える数理モデルを使ってこそ数理の力は発揮されるはずである。わけのわからない「もやもや」状況から、単純で本質をついた数理モデルをつくる作業は、センスの良いひらめきを要する。ここ40年で、たとえば、John J. Hopfield 教授 [11-16] や、Christoph von der Malsburg 教授 [31, 32, 34, 35]、Stuart Geman 教授 [7-9] など同一研究者が興味深い単純な数理モデルをコンスタントに提案している状況には、ただただ驚かされる。

6 まとめ

どうして2台の自然周波数の異なるメトロノームが同期するのだろうか。手品を見ているとしか思えない。実際に実験の場を観察すると、メトロノームを置いた台からの、ほんの微小な共通入力項が、それぞれのメトロノームの動作を決定づけていることに違いないことは推測できる。しかし、2台のメトロノームの同期現象と式(2,3)には大きなギャップがある。運動方程式から一つ一つのステップを経て、同期現象の理解にたどり着くには、相当のステップ数が必要である。このモデル（式2,3は蔵本モデルと呼ばれている）なしで、同期現象を理解することは簡単ではない。

最後に、もう一つ。コンピュータがどこにもある現在でも、大学の講義「微分方程式」では微分方程式を解くことに、歴史的背景からか、重みが置かれている。「こんな微分方程式、現実の世界のどこに登場するんだろう」という（解ける！）微分方程式が教科書に登場する。

解き方を教えるにしても、メトロノームの同期のような現象を通し、微分方程式の定性的な性質を数理的に分析することを、早い段階で紹介したほうが、少なくとも工学部の学生に対しては良いと思う。問題を発見する喜び、問題を定式化し、単純な数理モデルを用い現象を理解（できたと錯覚？）する喜びこそ大切にしたい。

謝辞：メトロノームの実験については、北畑裕之氏にいくつかのポイントを教えていただいた。また、龍野正実氏に、この原稿をチェックしていただいた。

参考文献

- [1] 甘利. 記憶研究の戦略. 科学, 55:394–395, July 1985.
- [2] 甘利. 情報の符号化と脳内表現. 電気学会雑誌, 106(5):431–434, Feb. 1986.
- [3] 甘利. 神経回路モデルとコネクショニズム. 東京大学出版会, 東京, 1989.
- [4] E. N. Brown, R. E. Kass, and P. P. Mitra. Multiple neural spike train data analysis: state-of-the-art and future challenges. *Nature Neuroscience*, 7:456–461, 2004.
- [5] G. Buzsáki. Large-scale recording of neuronal ensembles. *Nature Neuroscience*, 7:446–451, 2004.
- [6] A. Date, E. Bienenstock, and S. Geman. On the temporal resolution of neural activity. Technical report, Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence, RI, USA, May 1998.
- [7] S. Geman. Invariance and selectivity in the ventral visual pathway. *Journal of Physiology, Paris*, 100:212–224, 2006.
- [8] S. Geman, A. Amarasingham, M. Harrison, and N. Hatsopoulos. The statistical analysis of temporal resolution in the nervous system. Technical report, Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence, RI, USA, 2008.
- [9] S. Geman, D. Potter, and Z. Chi. Composition systems. *Quarterly of Applied Mathematics*, LX:707–736, 2002.
- [10] 郡. 力学系によるアプローチ：振動現象を具体例として. 数理科学, 2011年2月号.
- [11] J. J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Science U.S.A.*, 79:2554–2558, 1982.
- [12] J. J. Hopfield. Pattern recognition computation using action potential timing for stimulus representation. *Nature*, 376:33–36, 1995.
- [13] J. J. Hopfield. Searching for memories, Sudoku, implicit check bits, and the iterative use of not-always-correct rapid neural computation. *Neural Computation*, 20:1119–1164, 2008.
- [14] J. J. Hopfield. Neurodynamics of mental exploration. *Proceedings of the National Academy of Science U.S.A.*, 107:1648–1653, 2010.
- [15] J. J. Hopfield, D. I. Feinstein, and R. G. Palmer. ‘Unlearning’ has a stabilizing effect in collective memories. *Nature*, 304:158–159, 1983.
- [16] J. J. Hopfield and A. V. M. Herz. Rapid local synchronization of action potentials: toward computation with coupled integrate-and-fire neurons. *Proceedings of the National Academy of Science U.S.A.*, 92:6655–6662, 1995.
- [17] 蔵本. 非線形科学. 集英社新書, 2007.

- [18] 蔵本, 河村. 同期現象の数理 位相記述によるアプローチ. 培風館, 2010.
- [19] M. S. Livingstone. Oscillatory firing and interneuronal correlations in squirrel monkey striate cortex. *Journal of Neurophysiology*, 75:2467–2485, 1996.
- [20] Y. Miyashita. Neuronal correlate of visual associative long-term memory in the primate temporal cortex. *Nature*, 335:817–820, 1988.
- [21] Y. Miyashita, A. Date, and H. Okuno. Configurational encoding of complex visual forms by single neurons of monkey temporal cortex. *Neuropsychologia*, 31:1119–1131, 1993.
- [22] 宮田, 伊達, 倉田. 神経振動子場における局在振動の位相同期に関する研究. 知能と情報, 2011年. (印刷中).
- [23] W. T. Newsome, K. H. Britten, and J. A. Movshon. Neuronal correlates of a perceptual decision. *Nature*, 341:52–54, 1989.
- [24] 岡村, 吉川. 台所で遊ぶ結合振動子の実験. 数理科学, pp. 7–13, 1997年6月号.
- [25] T. J. Sejnowski. Sleep and memory. *Current Biology*, 5:832–834, 1995.
- [26] M. P. Stryker. Cortical physiology: Is grandmother an oscillation? *Nature*, 338:297–298, 1989.
- [27] M. P. Stryker. Seeing the whole picture. *Current Biology*, 1:252–253, 1991.
- [28] M. P. Stryker. Temporal associations. *Nature*, 354:108–109, 1991.
- [29] M. P. Stryker. Elements of visual perception. *Nature*, 360:301–302, 1992.
- [30] 龍野. 自由行動中の動物からの多電極同時記録とそのデータ解析. 日本神経回路学会誌, 17:124–138, 2010.
- [31] C. von der Malsburg. Self-organization of orientation sensitive cells in the striate cortex. *Kybernetik*, 14:85–100, 1973.
- [32] C. von der Malsburg. The correlation theory of brain function. In E. Domany, J. L. van Hemmen, and K. Schulten eds., *Models of Neural Networks II: Temporal Aspects of Coding and Information Processing in Biological Systems*, pp. 95–119. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [33] C. von der Malsburg. The what and why of binding: The modeler’s perspective. *Neuron*, 24:95–104, 1999.
- [34] C. von der Malsburg and J. Buhmann. Sensory segmentation with coupled neural oscillators. *Biological Cybernetics*, 67:233–242, 1992.
- [35] D. J. Willshaw and C. von der Malsburg. How patterned neural connections can be set up by self-organization. *Proceedings of the Royal Society of London Series - B: Biological Sciences*, 194:431–445, 1976.
- [36] 北畑, 吉川. 化学・生物の世界のリズム. 蔵本 (編), *リズム現象の世界*, pp. 1–37. 東京大学出版会, 東京, 2005.