多重連結領域における定常Navier-Stokes方程式の境界値問題

奈良女子大学・理　柳沢　卓

1　Lerayの問題とLerayの定理

領域Ω対して，次の仮定をおく．

仮定　ΩをC^∞-境界$\partial\Omega$をもつ$\mathbb{R}^n (n=2,3)$の有界領域で，更に次の条件を満たすものとする：

(i) 境界$\partial\Omega$は，$L+1$個の互いに素な連結成分$\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_L$からなり，$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_L$は$\Gamma_0$の内部に含まれる．

(ii) N個の互いに素で$\partial\Omega$に横断的に交わるC^∞-級の切断面$\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$が存在して，$\Omega \setminus (\cup_{j=1}^N \Sigma_j)$は単連結となる．

注意１．

1. $n=2$のときは，$L=N$である．

2. $n=3$のとき，条件 (ii) は$\partial\Omega$の位相的制限となっている．

この仮定の下，次の非斉次境界条件下での定常 Navier-Stokes 方程式の境界値問題[1]を考える．

$$\begin{cases} -\mu\Delta v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p = 0 \ \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{div} v = 0 \ \text{ in } \Omega, \\ v = \beta \ \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここに，$v = v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$, $p = p(x)$は，それぞれ流体の速度ベクトル場，圧力場を表わす未知関数，νは粘性係数を表わす正定数である．更に，$\beta = \beta(x) = (\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x))$ は境界上で与えられた速度ベクトル場を表わす境界データである．

まず気がつくことは，(1) の解[2]が存在するならば，非圧縮条件 $\operatorname{div} v = 0$ in Ω より，境界データβは

（一般流量条件）[3]
$$\sum_{j=0}^{L} \int_{\Gamma_j} \beta\cdot\nu\, dS = 0, \tag{2}$$

すなわち各境界連結成分Γ_j，$j=0,1,\ldots,L$，上の流量の総和が零という条件を満足するように与えなくてはならないことである．（ここに，$\nu=\nu(x)$は，境界$\partial\Omega$上の点xにおける外向き単位法線ベクトルを表わす.）すなわち，(G.F.) は（1) の解が

[1]物理的には，境界からの流体の流入・流出状態を速度ベクトル場を通してあらかじめ与えた場合の，非圧縮粘性定常流を記述する境界値問題.

[2]正確には，次ページで定義する (1) の弱解.

[3]以下では，一般流量条件を (G.F.) と表わすことにする.

存在するための必要条件である．では,（G.F.）は（1) の解が存在するための十分条件でもあるのか，という次の問いが自然に出てくるであろう.

Leray の問題
(G.F.) を満足する境界データ β を任意に与えたとき, (1) はどのような粘性係数 μ に対しても（少なくとも一つの）解をもつか？

この問題に関しては，Leray による次の「部分的」解答が先駆的である.

Leray の定理 [11]
Ω を 仮定 を満足する有界領域とする．境界データ $\beta \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ が，((G.F.) より強い）次の条件

$$\text{（制限された流量条件）}^4 \quad \int_{\Gamma_j} \beta \cdot \nu \, dS = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, L, \tag{3}$$

すなわち各境界成分上での流量がそれぞれ零になるという条件を満たすならば，境界値問題 (1) は少なくとも一つ弱解をもつ.

ここに，**(1) が弱解をもつ** とは，次が成立することを意味する：
(G.F.) を満足する境界データ $\beta \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ に対して，あるベクトル場 $b^5 \in (H^1(\Omega))^3$ s.t. $\operatorname{div} b = 0$ in Ω, $b = \beta$ on $\partial\Omega$ とある非圧縮なベクトル場 $u \in (H_0^1(\Omega))^3$ が存在して，等式

$$\begin{aligned} \mu(\nabla u, \nabla\phi)_{L^2(\Omega)} + ((b\cdot\nabla)u + (u\cdot\nabla)b + (u\cdot\nabla)u,\, \phi)_{L^2(\Omega)} \\ = -\mu(\nabla b,\, \nabla\phi)_{L^2(\Omega)} + ((b\cdot\nabla)\phi,\, b)_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{4}$$

が，任意の $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ に対して成り立つ．ただし，

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) = \{\phi \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \,|\, \operatorname{div} \phi = 0 \text{ in } \Omega\}.$$

注意２.

1. Leray の定理は，どんな小さな粘性係数 μ に対しても，少なくとも一つの (1) の定常解の存在を示している点で画期的な結果といえる[6].

2. 可能性としては，境界データ β が (R.F.) 条件を満足せず，更に粘性係数 μ が十分小さいときには，β が (G.F.) を満たしていても (1) は弱解をもたないということもありうる[7].

[4]以下では，制限された流量条件を (R.F.) と表わすことにする.

[5]β のソレノイダル拡張 (後出）のこと.

[6]何故なら，粘性が小さくなると一般的には解の不安定化が起こり，乱流への移行が起こるからである．従って，Leray の結果は，不安定な定常解を捉えている可能性もある．勿論，このような議論をする前に，どのような関数空間に属する摂動を考えるのか等の「安定性の定義」を明確にしておかなければならないが.

[7]そうだとすると，Leray の問題は否定的に解決されたことになるが，この「可能性」の成否も未だ明らかではない.

Leray 以後，Ladyzhenskaya([10])，Fujita([3])，Hopf 等による本質的研究があるが，残念ながら Leray の問題は現在まで未解決のまま残されている．

ただし，(G.F.) のみの下でも，次の局所的結果は比較的容易に示すことができることに注意しておこう．

局所的結果

粘性係数 μ が十分大きいとき，あるいは境界データ β が十分小さいときには，(G.F.) のみの下でも (1) の弱解が存在する．

本稿では，この局所的結果を精密化することにより，(1) の弱解が少なくとも一つ存在する為の十分条件を，(R.F.) より弱い形で求めること[8]を目標とする．

その為に，まず Leray の定理の証明の概略を Hopf のアイデアを取り入れた形で与えておこう．

Leray の定理の証明の概略

Step1． 以下，境界データ $\beta \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ に対して，次を満足する Ω への拡張 $b \in (H^1(\Omega))^3$ を β のソレノイダル拡張とよぶことにする：

$$\mathrm{div}\ b = 0 \text{ in } \Omega,\ b = \beta \text{ on } \Omega.$$

β のあるソレノイダル拡張 b に対して，$u = v - b$ とおくと，(1) は次の斉次境界値問題に書き換えられることに注意する：

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + (u\cdot\nabla)b + (b\cdot\nabla)u + \nabla p = F_b \ \text{ in } \Omega, \\ \qquad\qquad \mathrm{div}\, u = 0 \ \text{ in } \Omega, \\ \qquad\qquad\quad u = 0 \ \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

ここに，$F_b = \mu\Delta b - (b\cdot\nabla)b$.

従って，以下では，β の適当なソレノイダル拡張 b を取ってくることにより，(5) の弱解 u が存在することを示していくことにするが，実は，(5) 弱解の存在を構成的に証明する為には，次の Claim を示すことが本質的であることが知られている ([10], [14]).

Claim. ある定数 C が存在して，次の不等式が任意のテスト関数 $\phi \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)^3$ に対して成立する：

$$(L_b\phi, \phi)_{L^2(\Omega)} \geq c\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{6}$$

ここに，

$$L_b u = -\mu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + (u\cdot\nabla)b + (b\cdot\nabla)u + \nabla p,$$

である．

[8] §2 の主定理を参照.

一方，部分積分をおこなうことにより，

$$(L_b\phi,\phi)_{L^2(\Omega)} = \mu\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + ((\phi\cdot\nabla)b,\phi)_{L^2(\Omega)}$$

となることが分かるので，Claim は

$$|((\phi\cdot\nabla)b,\phi)_{L^2(\Omega)}| < \mu\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for all } \phi\in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega), \tag{7}$$

が成立することを示せば十分[9] であることが分かる．

従って，次のステップでは，β の適当なソレノイダル拡張 b を取ってくると上記不等式 (7) が成り立つことをみていく．

Step 2． (R.F.) に関する，次の Fact が成立することに注意する．

Fact．
$\beta\in H^{1/2}(\partial\Omega)$ が (R.F.) を満足する．
$\iff {}^\exists w\in (H^2(\Omega))^3$ s.t. $\beta = \mathrm{rot}\ w$ on $\partial\Omega$. [10] [11]

更に，$\theta_\varepsilon\in C^\infty(\overline{\Omega})$，$\varepsilon>0$，を次を満たす cut-off 関数とする[12]：

$$\theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } \rho(x)\equiv dist(x,\partial\Omega)\le e^{-2/\varepsilon} \\ 0 & \text{for } \rho(x) > 2e^{-1/\varepsilon}, \end{cases}$$

且つ

$$|\nabla\theta_\varepsilon(x)| \le \frac{\varepsilon}{\rho(x)} \qquad \text{for } \rho(x) < 2e^{-1/\varepsilon}.$$

この w と θ_ε を用いて $b_\varepsilon\equiv \mathrm{rot}\ (\theta_\varepsilon w)$ とおく．容易に，b_ε も β のソレノイダル拡張となっていることが分かるが，更に Sobolev，Hölder 及び Hardy の不等式を適宜用いることにより，

$$|(u\cdot\nabla)b_\varepsilon,u)_{L^2(\Omega)}| \le \epsilon\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{for all } \phi\in C^\infty_\sigma(\Omega) \tag{8}$$

を示すことができる[13]．よって，(8) において $\varepsilon<\mu$ ととれば (7) が従うので，Leray の定理の証明は完結する．

[9] もう少し正確に言うと，$-((\phi\cdot\nabla)b,\phi)_{L^2(\Omega)} < \mu\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)}$ が任意のテスト関数 $\phi\in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ に対して成り立てば十分．

[10] 従って，rot w は β のソレノイダル拡張となっていることに注意する．

[11] $\Leftarrow$ の部分の証明は，ストークスの定理による．$\Rightarrow$ の部分の証明は，次節で与える．

[12] Hopf により導入された．この性質を有する関数 θ_ε の構成法については，例えば [14] の Lemma1.9 in Ch.II を参照のこと．

[13] この部分の証明も [14] の §1.4 in Ch.II と Appendix I を参照のこと．

2 Leray の定理の一拡張

前節の議論を踏まえて，Leray の定理の一拡張を与えよう．証明においては，次の Hodge 分解定理を本質的に用いる．記述を簡潔にする為に，以下では $n=3$ の場合のみを考察する[14]．

Hodge 分解定理 ([6])[15]
Ω を前節の 仮定 を満足する $\mathbb{R}^3$ の有界領域とする[16]．更に，Ω 上の調和ベクトル場全体のなす空間 $V_{har}(\Omega)$ を次で与える[17]．

$$V_{har}(\Omega)=\{h\in(C^\infty(\overline{\Omega}))^3\,|\,\mathrm{div}\ h=0,\ \mathrm{rot}\ h=0\ \text{in}\ \Omega,\ h\times\nu=0^{18}\ \text{on}\ \partial\Omega\}.$$

このとき，次が成立する．
(I) r を $1<r<\infty$ なる実数，m を 0 以上の整数とする．任意の $u\in(W^{m,r}(\Omega))^3$ に対して，$^\exists h\in V_{har}(\Omega)$，$^\exists w\in(W^{m+1,r}(\Omega))^3$，$^\exists p\in W_0^{m+1,r}(\Omega)$ s.t.

$$u=h+\mathrm{rot}\ w+\nabla p\qquad\text{in}\ \Omega.$$

(右辺に現れる各項は u から一意的に定まる.)
(II) $\dim V_{har}(\Omega)=L$ で，更にその基底は $\{\psi_j=\nabla q_j\}_{j=1}^L$ で与えられる．ここに，q_j は次の境界値問題の解である：

$$\begin{cases}\Delta q_j=0\ \text{in}\ \Omega,\\ q_j|_{\Gamma_i}=\delta_{ij}\ \text{for}\ i=0,1,\dots,L,\quad j=1,\dots,L.\end{cases}\tag{9}$$

(ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表わす.)

まず最初に，前節の Step 2 で挙げた Fact の $\Rightarrow$ の部分の証明を Hodge 分解定理を用いて与えておく．$\beta\in(H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ が (R.F.) を満足するとする．このとき，β のソレノイダル拡張 $b\in(H^1(\Omega))^3$ が存在することが知られている[19]．この b に上の Hodge 分解定理の (I) を適用すると，$^\exists h\in V_{har}(\Omega)$，$^\exists w\in(H^2(\Omega))^3$，$^\exists p\in H_0^2(\Omega)$ s.t.

$$b=h+\mathrm{rot}\ w+\nabla p\qquad\text{in}\ \Omega,$$

[14] $n=2$ の場合も，ほぼ同様の議論ができる．
[15] ここに挙げる主張は，本節で使う部分だけを抜粋したものである．Hodge 分解定理 (=Helmholtz-Weyl 分解定理）の正確な主張と関数空間等の定義に関しては，[6] を見て頂きたい．
[16] Ω の位相的制限である 仮定 の条件 (ii) は，下記主張 (II) における，「$\{\psi_j\}_{j=1}^L$ が $V_{har}(\Omega)$ を張ること」の部分の証明に必要であった．
[17] 流体力学で通常使われる調和ベクトル場全体のなす空間

$$\{h\in(C^\infty(\overline{\Omega}))^3\,|\,\mathrm{div}\ h=0,\mathrm{rot}\ h=0\ \text{in}\ \Omega,\ h\cdot\nu=0\ \text{on}\ \partial\Omega\}(\equiv X_{har}(\Omega))$$

とは，境界条件が異なることに注意．また，$X_{har}(\Omega)$ と $V_{har}(\Omega)$ は，Ω 上の調和 1 微分形式と調和ベクトル場を同一視したときに自然に導入される空間であることも注意しておく．
[18] $\times$ はベクトルの外積を表わす．
[19] [9] を参照せよ．実は，$\beta\in(H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ が (G.F.) を満足すれば，β のソレノイダル拡張は存在する．

が成立することが分かる．この両辺に div を作用させると $0 = \mathrm{div}\ b = \Delta p$ in Ω となるが，$p|_{\partial\Omega} = 0$ であることに注意すると，結局 $p \equiv 0$ を得る．一方，Hodge 分解定理の (II) 及び (R.F.) より，$V_{har}(\Omega)$ の各基底 ψ_j，$j = 1, \ldots, L$，に関して，

$$
\begin{aligned}
(b, \psi_j)_{L^2(\Omega)} = (b, \nabla q_j)_{L^2(\Omega)} &= \int_{\partial\Omega} (b \cdot \nu) q_j \, dS - (\mathrm{div}\ b, q_j)_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_{\Gamma_j} b \cdot \nu \, dS = \int_{\Gamma_j} \beta \cdot \nu \, dS = 0,
\end{aligned}
$$

が成立するので，$h \equiv 0$．従って，$b = \mathrm{rot}\ w$ in Ω が示され，Fact. の $\Rightarrow$ の部分が証明された．

次に，上記と全く同様の議論を (G.F.) を満足する $\beta \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ に対しておこなうと，β のソレノイダル拡張 $b \in (H^1(\Omega))^3$ で，

$$
b = \sum_{j=1}^{L} \left(\int_{\Gamma_j} \beta \cdot \nu \, dS \right) \varphi_j + \mathrm{rot}\ w \quad \text{in } \Omega, \tag{10}
$$

なる形で与えられるものが存在することを示すことができる．ここに，$\{\varphi_j\}_{j=1}^{L}$ は Hodge 分解定理 (II) の $\{\psi_j\}_{j=1}^{L}$ から構成される $(L^2(\Omega))^3$-内積に関する $V_{har}(\Omega)$ の正規直交基底[20]，$w \in (H^2(\Omega))^3$ は b のベクトルポテンシャル部分，である．

ここで，(10) の右辺の調和ベクトル部分を $h(\beta, \Omega)$ とおこう，i.e.,

$$
h(\beta, \Omega) = \sum_{j=1}^{L} \left(\int_{\Gamma_j} \beta \cdot \nu \, dS \right) \varphi_j{}^{21}. \tag{11}
$$

(10) の右辺のベクトルポテンシャルで表わされる部分 rot w に対しては，前節 Step 2 における Hopf の cut-off 関数を用いた議論が適用できるので，(9) と同様の評価ができる．従って，Sobolev の埋蔵定理及び Hölder の不等式を用いて調和部分 $h(\beta, \Omega)$ を適当に評価すれば，下の (12) の意味での調和部分 $h(\beta, \Omega)$ の smallness があれば，前節の不等式 (7) が成り立つことを示すことができる．すなわち，次の主定理を得る．

主定理 [7]　Ω を前節の仮定を満足する $\mathbb{R}^3$ の有界領域とする．このとき，(G.F.) を満足する境界データ $\beta \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ が，更に次の条件

$$
\|h(\beta, \Omega)\|_{L^3(\Omega)} < \mu C_s^{-1} \tag{12}
$$

を満足するならば，境界値問題 (1) の弱解は少なくとも一つ存在する．

---

[20] 具体的には，ある $L \times L$ 正則行列 $(\alpha_{jk})_{1 \le j,k \le L}$ を用いて，

$$
\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{L} \alpha_{jk} \psi_k(x), \quad j = 1, \ldots, L, \ \text{for all } x \in \Omega,
$$

で与えられる．

[21] 実際，右辺は境界データ β と，Ω の相対 de Rham コホモロジー $V_{har}(\Omega)$ の基底である $\{\varphi_j\}_{j=1}^{L}$ のみから決定され，β のソレノイダル拡張 b の取り方には依存していないことに注意．

ここに，$C_s = 3^{-1/2}2^{2/3}\pi^{-2/3}$ は Sobolev の埋め込み：$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ の最良定数である．

以下，主定理に主張に対する注意をいくつか挙げておく．

注意 3.

1. (R.F.) が成立するならば，(11) から直ちに $h(\beta, \Omega) \equiv 0$ となることが示される．従って，主定理は Leray の定理の一拡張となっている．主定理とは別方向の Leray の定理の拡張については，例えば [12] を参照のこと．

2. Leray-Schauder の不動点定理と背理法を組み合わせることにより，条件 (12) は

$$\sup_{z\in\chi(\Omega),\nabla z\neq 0} \frac{(h,(z\cdot\nabla)z)_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla z\|^2_{L^2(\Omega)}} < \mu$$

なる条件に弱めることができる ([8])．ここに，$\chi(\Omega)$ は Dirichlet 境界条件を満足する Ω 上の定常 Euler 方程式の解全体のなす空間を表わす．

最後に，いくつかの関連する話題について述べておく．

(I) 前節の Claim で述べたように，(1) の弱解の存在を構成的に証明する為には，次の「Leray の不等式の成立」を示すことが本質的となる： (G.F.) を満足する境界データ $\beta \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ と Ω に対して，Leray の不等式が成立する とは，
任意の $\epsilon > 0$ に対して，β のあるソレノイダル拡張 $b_\epsilon \in (H^1(\Omega))^3$ が存在して，次の不等式

$$-((u\cdot\nabla)b_\epsilon, u) \le \epsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

が任意の $u \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ に対して成り立ことをいう．

この Leray の不等式の成立（あるいは不成立）と領域 Ω の位相的性質の間の興味深い関係については，Takeshita による先駆的な論文 [13] 以降いくつかの研究 ([4], [5]，[8]，[2] 等) がなされているが，未だ決定的な結果は得られていない．

(II) 上記の主定理は §1 に挙げた局所的結果の精密化にすぎない．(R.F.) を外したときの，本質的に大域的な結果はまだないと思う．しかし，領域及び対象とする流れにある対称性を課した場合には，Amick による次の大域的な結果がある ([1])：
$\mathbb{R}^2$ における有界領域 Ω が次の対称性をもつとする．
(i) Ω は x_1- 軸に関して対称，
(ii) $\partial\Omega$ は $L+1$ 個の互いに素な滑らかな連結成分 $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_L$ からなり，$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_L$ は Γ_0 の内部に含まれる．更に，$\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_L$ は x_1-軸と交わる．

このとき，x_1 - 軸に関して対称な境界データ[22] $\beta \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ が (G.F.) を満足するならば，(1) は x_1-軸に関して対称な弱解を少なくとも 1 つもつ[23]．

[22] ここに，ベクトル場 $u = (u_1, u_2)$ が x_1-軸に関して対称であるとは，u_1 が x_2 変数に関して偶関数，u_2 が x_2 変数に関して奇関数となることをいう．

[23] Amick による証明は背理法を用いている．その後 [4] により，実はこの問題に対しても，Leray の不等式がテスト関数を x_1-軸に対称なベクトル場に制限した場合には成立することが示され，構成的な存在証明も与えられた．

しかし，たとえば，(a) Ω が x_1-軸に関して対称ではあるが内部境界 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_L$ が x_1-軸と交わらない場合の解析，(b) $\mathbb{R}^3$ において，領域と流れに適当な「対称性」を課した場合の解析，等に関する結果は殆ど得られていない（[8] 参照）.

（III）乱流との関連という観点からは，　（何らかの形で）得られた (1) の弱解の非粘性（$\mu \to 0$ としたときの）極限における漸近挙動や分岐現象を解明することが，最も重要な研究課題の一つとなるであろう.

参考文献

[1] Amick, C.J.: *Existence of solutions to the nonhomogeneous steady Navier-Stokes equations.* Indiana Univ. Math. J. **33**, 817-830 (1984).

[2] Farwig, R., Kozono, H., Yanagisawa, T.: *Leray's inequality in general multi-connected domains in* $\mathbb{R}^n$. to appear Math. Ann.

[3] Fujita, H.: *On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA **9**, 59-102 (1977).

[4] Fujita, H.: *On stationary solutions to Navier-Stokes equations in symmetric plane domains under general outflow condition.* In: Navier-Stokes equations: theory and numerical methods,Varenna 1997, Pitmann Res. Notes Math. Ser. vol. 388, Longman-Harlow, 16-30 (1998).

[5] Kobayashi, T.: *Takeshita's examples for Leray's inequality.* Preprint.

[6] Kozono, H., Yanagisawa, T.: *L^r-variational inequality for vector fields and the Helmholtz-Weyl decomposition in bounded domains.* Indiana Univ. Math. J. **58**, 1853-1920 (2009).

[7] Kozono, H., Yanagisawa T.: *Leray's problem on the stationary Navier-Stokes equations with inhomogeneous boundary data.* Math. Z. **262**, 27-39 (2009).

[8] Kozono, H., Yanagisawa, T.: *Nonhomogeneous boundary value problems for stationary Navier-Stokes equations in a multiply connected bounded domain.* Pacific J. Math. **243**, 127-150 (2009).

[9] Ladyzhenskaya, O., Solonnikov, V.: *Some problems of vector analysis and generalized formulation of boundary value problems for the Navier-Stokes equations.* J. Soviet Math. **8**, 257-286 (1978).

[10] Ladyzehnskaya, O.A.: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. Gordon and Breach, London.* (1969).

[11] Leray, J.: *Etude de diverses équations integrals non linéaries et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique.* J. Math. Pures Appl. **12**, 1-82 (1969).

[12] Morimoto, H.: *General outflow condition for Navier-Stokes flow.* Recent topics in mathematical theory of viscous incompressible fluids, Tsukuba 1996, edited by H. Kozono and Y. Shibata, Lec. Notes Num. Appl. Vol.16, Kinokuniya, Tokyo, 209-224 (1998).

[13] Takeshita, A.: *A remark on Leray's inequality.* Pacific J. Math. **157**, 151-158 (1993).

[14] Temam, R.: *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. 2nd ed.* Studies in Mathematics and its Applications 2. North-Holland, Amsterdam (1979).