海底変動による津波生成の数学解析

井口達雄
慶應義塾大学 理工学部 数理科学科

1 はじめに

水の波の一つである津波は，主として海底地震による海底の変動によって引き起こされる．すなわち，その海底の変動が海面の変動を誘発し，その海面の変動が重力を復元力として波として水面上を伝播していく．その波をことを津波あるいは地震津波という．津波は水深と比較して波長が非常に長い水の波として特徴付けられる．一方，水の波は通常，鉛直下向きの重力場内における自由境界を伴った非圧縮性かつ非粘性流体の渦無し流としてモデル化されている．したがって，数学的には渦度が零という制約条件の下での非圧縮性 Euler 方程式の自由境界問題として定式化される．ところが，その水の波の基礎方程式系は非常に複雑であり，それを直接解析したりシミュレーションすることは容易ではない．そのため，その近似モデルが幾つか提唱されている．その代表的な近似モデルが浅水波方程式であり，特に津波のシミュレーションの際には，水面の初期変位が海底の地震による永久変位に等しく，初期速度は零であるとしている．つまり，海底地震によって引き起こされる津波の数値シミュレーションには次の初期値問題が使われている．

$$
\begin{cases} \eta_t + \nabla\cdot\big((h+\eta-b_1)u\big) = 0, \\ u_t + (u\cdot\nabla)u + g\nabla\eta = 0, \end{cases} \tag{1.1}
$$

$$
\eta|_{t=0} = b_1 - b_0, \qquad u|_{t=0} = 0. \tag{1.2}
$$

ここで，η は水面の変位，u は水面での水平方向の速度場，g は重力定数，h は平均水深，b_0 および b_1 は，それぞれ，海底地震前および後の海底の凹凸を表す関数である．後で紹介するように，水の波の基礎方程式系を浅水波方程式 (1.1) で近似することの正当性は既に与えられている．それを踏まえ，ここでは特に，初期条件 (1.2) が妥当であるかどうか，妥当であるならばその数学的な証明を与え，そうでなければ (1.2) の修正版を提唱したい．

この問題を議論していく上で重要になるのが二つの無次元数 δ および ε である．δ は平均水深 h と代表波長 λ の比であり，いわゆる縦横比である．太平洋の平均的な水深は 4 キロメートルであるのに対し，津波の波長は非常に長く数十キロメートル〜数百キロメートルにもなる．それゆえ，津波に対しては δ^2 は非常に小さな数になる．また，ε は海底地震が起きている時間 t_0 と津波の周期 $\lambda/\sqrt{gh}$ の比である．ここで，$\sqrt{gh}$ は線形浅水波の伝播速度であることに注意しよう．一般的に，海底地震が起きている時間は数十秒であるのに

対し，津波の周期は数十分から，ときには1時間にもなる．したがって，ε もまた非常に小さな数である．

浅水波方程式 (1.1) が水の波の基礎方程式系から $\delta^2 \to +0$ の極限において，少なくとも形式的には，導出されることはよく知られている．その導出はG.B. Airy [1] まで遡る．その後，K.O. Friedrichs [6] は，水の波の基礎方程式系の解を δ^2 で展開することにより，より系統的に浅水波方程式を導出している．水の波全般や浅水波近似については，H. Lamb [13] あるいはJ.J. Stoker [19] を参照して頂きたい．浅水波近似の数学的に厳密な正当性，すなわち，水の波の基礎方程式系の解と浅水波方程式の解との誤差評価を初めて証明したのはL.V. Ovsjannikov [17, 18] である．そこでは，2次元空間における水の波を扱っており，水底は平らで，水平方向には周期境界条件を課していた．その後，鹿野–西田 [11] はL.V. Ovsjannikov の結果を，水平方向に周期境界条件を課さず遠方で減衰する場合に拡張している．ただし，これらの結果では，水の波の基礎方程式系の解の存在を示すために抽象的な Cauchy–Kowalevski の定理が使われており，それゆえ初期値に対しては解析性を仮定しなければならなかった．一方，V.I. Nalimov [16] は深さが無限であるような2次元空間内の水の波の初期値問題を Sobolev 空間の範疇で解いており，しかも吉原 [23] はその結果をほぼ平らな水底がある場合に拡張していた．それゆえ，筆者が学生の頃は，浅水波近似の数学的に厳密な正当性が Sobolev 空間の範疇でできないか？という問題があった．筆者もその頃その問題に挑戦してみたのであるが，全く歯が立たなかったのをよく覚えている．その問題は長らく解かれていなかったのであるが，少し前になってようやく肯定的に解決された [8, 15, 4]．筆者は 2006 年にその結果を得てプレプリントを出し，暫くは嬉しい気分でいたのであるが，同時期に Y.A. Li [15] の論文が出ているのを見て冷や汗をかいた．しかし，彼女は本質的に等角写像を用いており，その結果は2次元空間に限定されているのを見て安心した．ただし，筆者の論文 [8] が出版される前に，後発の B. Alvarez-Samaniego–D. Lannes [4] の論文が先に出版されたのは残念である．以上が，水の波の浅水波近似に関する数学的な結果であるが，いずれの結果でも水底が時間と共に動くような場合は扱われておらず，それゆえ初期条件 (1.2) の正当化に関する数学的な結果については，少なくとも筆者は見たことがない．

以上の現状を踏まえ，ここでは，初期値および水底に関する適当な仮定の下，$\delta^2/\varepsilon \to +0$ という制約下における極限 $\delta^2, \varepsilon \to +0$ において水の波の基礎方程式系の解が津波モデル (1.1)–(1.2) の解で近似されることを紹介したい．このことは，水底の変形速度がある程度は早いのだけれども，あまり早過ぎない場合には，津波モデル (1.1)–(1.2) は良いモデルであることを保証する．さらに，臨界極限すなわち $\delta^2 \simeq \varepsilon \to +0$ では初期速度場も考慮しなければならず，初期条件 (1.2) は次の初期条件

$$\eta|_{t=0} = b_1 - b_0, \qquad u|_{t=0} = \nabla\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0} b_t(\cdot,t)^2 \mathrm{d}t\right) \tag{1.3}$$

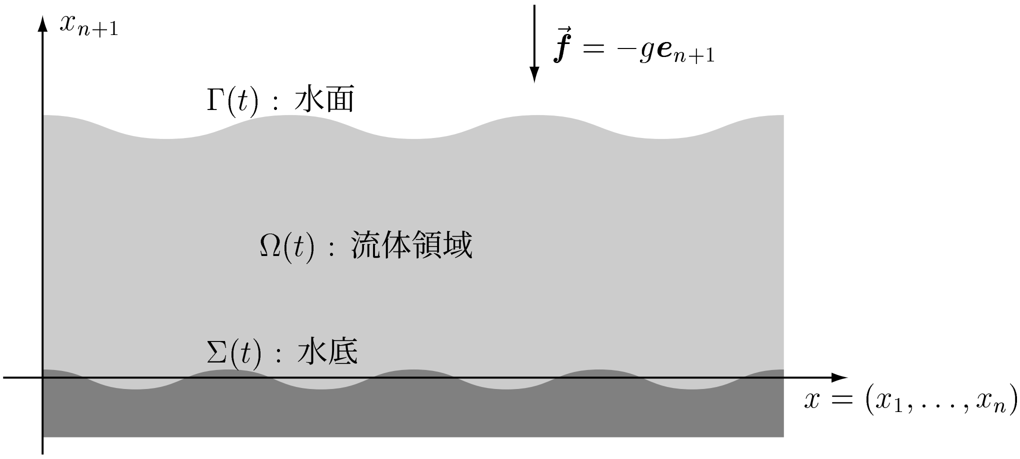
に修正しなければならないことも紹介する．ここで，$b = b(x,t)$ は水底の凹凸を記述する関数である．これらの結果を証明する際に最も困難なことは，無次元化された水の波の基礎方程式系の解およびその導関数が，海底地震が起きている時間区間 $0 \le t \le \varepsilon$ において，小さな無次元数 δ および ε に関して一様に有界であることを示すことである．

2　問題設定

水平方向および鉛直方向の空間変数を，それぞれ，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ および x_{n+1} で表わし，$X = (x, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ を全空間変数とする．したがって，ここでは $n+1$ 次元空間内の水の波を考える．勿論，物理的に意味があるのは $n = 1, 2$ のときである．時刻 t において水が占めている領域 $\Omega(t)$，水面 $\Gamma(t)$，および水底 $\Sigma(t)$ は次のように表わされているとする．

$$\begin{aligned}
\Omega(t) &= \bigl\{ X = (x, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \,;\, b(x,t) < x_{n+1} < h + \eta(x,t) \bigr\}, \\
\Gamma(t) &= \bigl\{ X = (x, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \,;\, x_{n+1} = h + \eta(x,t) \bigr\}, \\
\Sigma(t) &= \bigl\{ X = (x, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \,;\, x_{n+1} = b(x,t) \bigr\}.
\end{aligned}$$

ここで，h は平均水深である．これらを図示すると以下のようになる．



関数 b および η は，それぞれ，水底の凹凸を表わす関数および水面の変動である．工学的には，海底地震による水底の変形過程を予測することは非常に重要であり，それゆえ，関数 b の挙動も解析の対象である．しかし，ここでは水底の変形過程は予め分かっているものとし，b は既知関数とする．そして水面の挙動，すなわち，関数 η の振る舞いを調べることに専念する．

2.1　水の波の基礎方程式系（その 1）

我々が対象とする水は非圧縮性かつ非粘性流体であり，渦無しの流れであると仮定する．このような仮定をしているのは，津波のような空間スケールの非常に大きな波に対しては粘性の影響は殆ど効かず，また水は非圧縮性流体の代表格のような流体で，深海の高圧下でも体積変化が殆どない流体だからである．さらに，保存力下での非粘性流体の運動に対しては Lagrange の渦定理により，渦は発生も消滅もしない．ところが，水の波は静止状態から何らかの保存力によって引き起こされた波と考えられているので，渦無しと仮定しているのである．したがって，この渦無しの仮定は，初期速度場が渦無しであること

と同値である．これらの仮定の下，水の波の運動は次式を満たす速度場 $\boldsymbol{v}$ および圧力 p によって記述される．

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} \rho\big(\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla_X)\boldsymbol{v}\big) + \nabla_X p = -\rho g \boldsymbol{e}_{n+1}, \\ \mathrm{div}_X \boldsymbol{v} = 0, \quad \mathrm{rot}_X \boldsymbol{v} = O \qquad \text{in} \quad \Omega(t). \end{cases}$$

ここで，ρ は水の質量密度，g は重力定数で，共に正定数である．また，$\boldsymbol{e}_{n+1}$ は鉛直上向きの単位ベクトル，$\nabla_X = (\partial_1, \ldots, \partial_n, \partial_{n+1})^T$ は空間変数 X に関する勾配，div_X および rot_X は，それぞれ，空間変数 X に関する発散および回転である．なお，一般次元における回転は $\mathrm{rot}_X \boldsymbol{v} = \big(\frac{1}{2}(\partial_j v_i - \partial_i v_j)\big)_{1\le i,j\le n+1}$ で定義される歪対称行列である．次に境界条件であるが，水面上の境界条件は次のようになる．

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} p = p_0, \\ \eta_t - \boldsymbol{v}\cdot(-\nabla\eta, 1) = 0 \qquad \text{on} \quad \Gamma(t). \end{cases}$$

最初の式は圧力の釣り合いを表わす力学的な境界条件であり，2 番目の式は水面が水の流れから自然に決まることを表わす運動学的な境界条件である．ここで，p_0 は大気圧であり定数である．また，$\nabla = (\partial_1, \ldots, \partial_n)^T$ は水平方向の空間変数 x に関する勾配である．水底での境界条件は，次のように運動学的な境界条件のみが課せられる．

$$\text{(2.3)} \qquad b_t - \boldsymbol{v}\cdot(-\nabla b, 1) = 0 \qquad \text{on} \quad \Sigma(t).$$

この (2.1)–(2.3) が水の波の基礎方程式系である．最後に，次のように初期条件を課す．

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{cases} \eta(\cdot, 0) = \eta_0 \quad \text{on} \quad \mathbf{R}^n, \\ \boldsymbol{v}(\cdot, 0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{in} \quad \Omega(0). \end{cases}$$

ただし，初期速度場 $\boldsymbol{v}_0$ は両立条件 $\mathrm{div}_X \boldsymbol{v}_0 = 0$ および $\mathrm{rot}_X \boldsymbol{v}_0 = O$ を満たさすように与えられなければならない．この水の波の基礎方程式系 (2.1)–(2.3) は以下のように書き直すことができる．

2.2　水の波の基礎方程式系（その 2）

水が占めている領域 $\Omega(t)$ は単連結であり，速度場 $\boldsymbol{v}$ は渦無し ($\mathrm{rot}_X \boldsymbol{v} = O$) であることから，$\boldsymbol{v}$ は一価関数の速度ポテンシャル Φ をもつ．すなわち，

$$\text{(2.5)} \qquad \boldsymbol{v} = \nabla_X \Phi$$

と書けることが分かる．このとき，流体が非圧縮 ($\mathrm{div}_X \boldsymbol{v} = 0$) であることから，$\Phi$ は次式を満たさなければならない．

$$\text{(2.6)} \qquad \Delta_X \Phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega(t).$$

ここで，Δ_X は全空間変数 X に関する Laplace 作用素であり，水平方向の空間変数 x に関する Laplace 作用素を Δ とすると，$\Delta_X = \Delta + \partial_{n+1}^2$ および $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ である．また，(2.1) の第 1 式より

$$\begin{aligned} 0 &= \rho\big(\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla_X)\boldsymbol{v}\big) + \nabla_X p + \rho g \boldsymbol{e}_{n+1} \\ &= \rho\nabla_X\Big(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla_X\Phi|^2 + \frac{1}{\rho}(p-p_0) + g(x_{n+1}-h)\Big) \end{aligned}$$

であるから，これを空間方向について積分し，速度ポテンシャル Φ に適当な時間 t のみの関数を加えれば

$$\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla_X\Phi|^2 + \frac{1}{\rho}(p-p_0) + g(x_{n+1}-h) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega(t)$$

が得られる．これは一般化された Bernoulli の定理と呼ばれている．これと水面上での境界条件 (2.2) より，次の水面上での境界条件が得られる．

$$\begin{cases} \eta_t + \nabla\Phi\cdot\nabla\eta - \partial_{n+1}\Phi = 0, \\ \Phi_t + \dfrac{1}{2}|\nabla_X\Phi|^2 + g\eta = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma(t). \end{cases} \tag{2.7}$$

また，水底上での境界条件 (2.3) は次のようになる．

$$b_t + \nabla\Phi\cdot\nabla b - \partial_{n+1}\Phi = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma(t). \tag{2.8}$$

この (2.6)–(2.8) もまた水の波の基礎方程式系であり，(2.1)–(2.3) と同値になっている．実際，(η,Φ) を (2.6)–(2.8) の解とするとき，速度場 $\boldsymbol{v}$ と圧力 p を，それぞれ，(2.5) および

$$p = p_0 - \rho\Big(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla_X\Phi|^2 + g(x_{n+1}-h)\Big)$$

で定めれば，$(\eta,\boldsymbol{v},p)$ が (2.1)–(2.3) の解となることが容易に確かめられる．流体力学の教科書では，水の波というとこの後者の基礎方程式系 (2.6)–(2.8) から議論が出発している場合が多い．最後に，次のように初期条件を課す．

$$\eta = \eta_0, \quad \Phi = \Phi_0 \quad \text{at} \quad t = 0. \tag{2.9}$$

ただし，初期速度ポテンシャル Φ_0 は両立条件 $\Delta_X\Phi_0 = 0$ を満たすように与えなければならない．以下では，この後者の基礎方程式系に対する初期値問題を考察する．

2.3 無次元化

次に，基礎方程式系 (2.6)–(2.8) を無次元化しよう．λ を代表波長，h を平均水深とし，無次元数 δ を

$$\delta = \frac{h}{\lambda}$$

で定める．そして，独立変数および従属変数を次のように無次元化する．

$$(2.10)\qquad x=\lambda\tilde{x},\quad x_{n+1}=h\tilde{x}_{n+1},\quad t=\frac{\lambda}{\sqrt{gh}}\tilde{t},\quad \Phi=\lambda\sqrt{gh}\tilde{\Phi},\quad \eta=h\tilde{\eta},\quad b=h\tilde{b}.$$

水平方向および鉛直方向に関する変数は，それぞれ，λ および h で，また時間変数は線形浅水波の周期 $\lambda/\sqrt{gh}$ でスケーリングされていることに注意しよう．これらを (2.6)–(2.8) に代入し，記号˜を消去すると次式が得られる．

$$(2.11)\qquad \delta^2\Delta\Phi+\partial_{n+1}^2\Phi=0 \quad \text{in} \quad \Omega(t),$$

$$(2.12)\qquad \begin{cases} \delta^2\bigl(\eta_t+\nabla\Phi\cdot\nabla\eta\bigr)-\partial_{n+1}\Phi=0, \\ \delta^2\Bigl(\Phi_t+\dfrac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+\eta\Bigr)+\dfrac{1}{2}(\partial_{n+1}\Phi)^2=0 \quad \text{on} \quad \Gamma(t), \end{cases}$$

$$(2.13)\qquad \delta^2\bigl(b_t+\nabla\Phi\cdot\nabla b\bigr)-\partial_{n+1}\Phi=0 \quad \text{on} \quad \Sigma(t).$$

ただし，この無次元化では，水面および水底は次のように表わされる．

$$\begin{aligned} \Omega(t)&=\bigl\{X=(x,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\,;\, b(x,t)<x_{n+1}<1+\eta(x,t)\bigr\}, \\ \Gamma(t)&=\bigl\{X=(x,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\,;\, x_{n+1}=1+\eta(x,t)\bigr\}, \\ \Sigma(t)&=\bigl\{X=(x,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\,;\, x_{n+1}=b(x,t)\bigr\}. \end{aligned}$$

さらに，水底 $\Sigma(t)$ は次元がある時間変数に関して時間区間 $[0,t_0]$ においてのみ変形していると仮定しよう．このとき，無次元化された関数 $b(x,t)$ は次の形に書ける．

$$(2.14)\qquad b(x,t)=\beta(x,t/\varepsilon),\qquad \beta(x,\tau)=\begin{cases} b_0(x) & \text{for} \quad \tau\le 0, \\ b_1(x) & \text{for} \quad \tau\ge 1. \end{cases}$$

ここで，ε は

$$\varepsilon=\frac{t_0}{\lambda/\sqrt{gh}}$$

で定まる無次元数である．無次元化した変数で見ると，水底は時間区間 $0\le t\le\varepsilon$ においてのみ変形しており，また $b_t=\varepsilon^{-1}\beta_\tau$ が成り立つことに注意しよう．我々は $\delta,\varepsilon\to+0$ のときの水の波の基礎方程式系の解の挙動に興味があるので，以下では常に $0<\delta,\varepsilon\le 1$ と仮定しておく．

2.4　水面上の方程式系

水の波の基礎方程式系 (2.11)–(2.13) に対する初期値問題の扱いを困難にしているのは，この問題が自由境界問題であり，未知関数 Φ と同時にその定義域である領域 $\Omega(t)$，特に水面の変位を表わす関数 η を決定しなければならない点にある．そのような困難は通常，独立変数に関して適当な（解に依存して決まる）変数変換を行い，固定境界上の問題に同

値変形することにより回避されている．ただし，変数変換自身が解を用いて定まるため，変換された方程式系は非線形性がより一層複雑になる．粘性流体に対する自由境界問題では，しばしばLagrange座標系を用いることにより，初期領域上の問題に変形されている．

もう一つの水の波の基礎方程式系特有の問題は，初期値問題を扱うのにも関わらず，その時間発展の様子が陽には見えてこない点にある．実際，領域内部における方程式 (2.11) は時間変数 t が単にパラメーターとしてしか入っていない．それに対して，境界条件 (2.12) の方が発展方程式のように見える．したがって，この (2.12) を時間発展の方程式だと思って初期値問題を解き，それによって水面上の物理量が分かれば，時間をパラメーターと思って楕円型方程式 (2.11) を解けばよいのでは？と思うことであろう．その際に問題になるのは，(2.12) には水面を多様体と思ったときの微分である接方向微分の他に，多様体上の微分にはならない法線方向微分も含まれている点にある．この法線方向微分は (2.12) だけからは決まらず，その意味で (2.12) は閉じた発展方程式の形をしていない．ところが，領域内部の方程式 (2.11) と水底上での境界条件 (2.13) より，その法線方向微分は接方向微分から決まってしまうことが分かる．その関係を用いて，時間発展の方程式系 (2.12) を閉じた形にし，それを解けば良いことになる．具体的には，領域と無次元数 δ に依存し非局所的な線形作用素である Dirichlet-to-Neumann (DN) 写像 $\Lambda^{\mathrm{DN}} = \Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)$ と Neumann-to-Neumann (NN) 写像 $\Lambda^{\mathrm{NN}} = \Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta, b, \delta)$ を導入することにより導かれる．以下の定義においては時間 t は任意に固定されているものとし，簡単のために t を省略することにする．

定義 2.1 η および b に対する適当な仮定の下，適当な関数空間に属する水面 Γ 上の任意の関数 ϕ と水底 Σ 上の任意の関数 γ に対して，境界値問題

$$
\begin{cases} \Delta\Phi + \delta^{-2}\partial_{n+1}^2\Phi = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \Phi = \phi & \text{on} \quad \Gamma, \\ \delta^{-2}\partial_{n+1}\Phi - \nabla b \cdot \nabla\Phi = \gamma & \text{on} \quad \Sigma \end{cases} \tag{2.15}
$$

は一意な解 Φ をもつ．この解 Φ を用いて $\Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)$ および $\Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta, b, \delta)$ を次式で定義する．

$$
\begin{aligned} \Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)\phi + \Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta, b, \delta)\gamma &= \delta^{-2}(\partial_{n+1}\Phi)(\cdot, 1 + \eta(\cdot)) - \nabla\eta \cdot (\nabla\Phi)(\cdot, 1 + \eta(\cdot)) \\ &= (\delta^{-2}\partial_{n+1}\Phi - \nabla\eta \cdot \nabla\Phi)|_{\Gamma}. \end{aligned} \tag{2.16}
$$

また，この解 Φ を $(\phi, \gamma)^{\hbar}$ と表わすことにする．

この定義から分かるように，$\Lambda^{\mathrm{DN}} = \Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)$ は水面上の Dirichlet data を水面上の Neumann data に，$\Lambda^{\mathrm{NN}} = \Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta, b, \delta)$ は水底上の Neumann data を水面上の Neumann data に写す線形写像である．ただし，これらは未知関数 η に依存しており，その依存性は強い非線形性を有している．

さて，新しい未知関数 ϕ を

$$
\phi(x, t) = \Phi(x, 1 + \eta(x, t), t) = \Phi|_{\Gamma(t)} \tag{2.17}
$$

により導入し，水の波の基礎方程式系 (2.11)–(2.13) から (η, ϕ) に対する閉じた方程式系を導こう．ϕ は速度ポテンシャルの水面上での境界値である．このとき，

$$
\begin{cases} \phi_t = (\Phi_t + (\partial_{n+1}\Phi)\eta_t)|_{\Gamma(t)}, \\ \nabla\phi = (\nabla\Phi + (\partial_{n+1}\Phi)\nabla\eta)|_{\Gamma(t)}. \end{cases} \tag{2.18}
$$

一方，(2.11), (2.13), および (2.17) より，Φ は境界値問題 (2.15) で γ を $b_t = \varepsilon^{-1}\beta_\tau$ に置き換えたものの解であることが分かる．したがって，

$$
\Lambda^{\mathrm{DN}}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{\mathrm{NN}}\beta_\tau = (\delta^{-2}\partial_{n+1}\Phi - \nabla\eta\cdot\nabla\Phi)|_{\Gamma(t)}. \tag{2.19}
$$

これらの関係式 (2.18) および (2.19) より次式が従う．

$$
\begin{cases} (\partial_{n+1}\Phi)|_{\Gamma(t)} = \delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{\mathrm{DN}}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{\mathrm{NN}}\beta_\tau + \nabla\eta\cdot\nabla\phi), \\ (\nabla\Phi)|_{\Gamma(t)} = \nabla\phi - \delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{\mathrm{DN}}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{\mathrm{NN}}\beta_\tau + \nabla\eta\cdot\nabla\phi)\nabla\eta, \\ \Phi_t|_{\Gamma(t)} = \phi_t - \delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{\mathrm{DN}}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{\mathrm{NN}}\beta_\tau + \nabla\eta\cdot\nabla\phi)\eta_t. \end{cases}
$$

これらを (2.12) に代入すれば，(η, ϕ) は次の初期値問題の解であることが分かる．

$$
\begin{cases} \eta_t - \Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta, b, \delta)\beta_\tau = 0, \\ \phi_t + \eta + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 \\ \qquad -\frac{1}{2}\delta^2(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}\bigl(\Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta, b, \delta)\beta_\tau + \nabla\eta\cdot\nabla\phi\bigr)^2 = 0, \end{cases} \tag{2.20}
$$

$$
\eta = \eta_0, \quad \phi = \phi_0 \quad \text{at} \quad t = 0. \tag{2.21}
$$

ただし，初期値 ϕ_0 は $\phi_0 = \Phi_0(\cdot, 1 + \eta_0(\cdot))$ により決まる．ここでは，この初期値問題 (2.20)–(2.21) を数学的に厳密に調べていく．

3 浅水波近似

この節では，初期値問題 (2.20)–(2.21) の解 $(\eta^{\delta,\varepsilon}, \phi^{\delta,\varepsilon})$ の $\delta, \varepsilon \to +0$ における振る舞いを調べ，浅水波方程式を形式的に導出していく．

3.1 $\beta_\tau \equiv 0$ の場合

まず初めに，$\beta_\tau \equiv 0$ の場合，すなわち水底が変形せず固定されている場合を考える．このとき，(2.20) の第 2 式より

$$
\phi_t + \eta + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = O(\delta^2).
$$

次に，(2.20) の第 1 式に対する近似方程式を導出するために，DN 写像 $\Lambda^{\mathrm{DN}} = \Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)$ を δ^2 で展開する必要がある．水面 Γ 上で与えられた関数 ϕ に対して，境界値問題

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} \Delta\Phi + \delta^{-2}\partial_{n+1}^2\Phi = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \Phi = \phi & \text{on} \quad \Gamma, \\ \delta^{-2}\partial_{n+1}\Phi - \nabla b \cdot \nabla\Phi = 0 & \text{on} \quad \Sigma \end{cases}
$$

の解を Φ と表わそう．ここでも，時間 t は任意に固定されているものとし，簡単のために t を省略することにする．(3.1) の第 1 式および第 3 式より

$$
(3.2) \qquad \begin{aligned} (\partial_{n+1}\Phi)(x, x_{n+1}, t) &= (\partial_{n+1}\Phi)(x, b(x), t) + \int_{b(x)}^{x_{n+1}} (\partial_{n+1}^2\Phi)(x, z, t)\mathrm{d}z \\ &= \delta^2\nabla b(x)\cdot\nabla\Phi(x, b(x), t) - \delta^2\int_{b(x)}^{x_{n+1}} (\Delta\Phi)(x, z, t)\mathrm{d}z. \end{aligned}
$$

これより，$(\partial_{n+1}\Phi)(X, t) = O(\delta^2)$ が従う．したがって，

$$
\begin{aligned} \nabla\Phi(x, x_{n+1}, t) &= \nabla\Phi(x, 1+\eta(x,t), t) + \int_{1+\eta(x,t)}^{x_{n+1}} (\nabla\partial_{n+1}\Phi)(x, z, t)\mathrm{d}z \\ &= \nabla\Phi(x, 1+\eta(x,t), t) + O(\delta^2). \end{aligned}
$$

さらに，(3.1) の第 2 式より

$$
\begin{aligned} \nabla\phi(x,t) &= \nabla\Phi(x, 1+\eta(x,t), t) + \nabla\eta(x)(\partial_{n+1}\Phi)(x, 1+\eta(x), t) \\ &= \nabla\Phi(x, 1+\eta(x,t), t) + O(\delta^2) \\ &= \nabla\Phi(X, t) + O(\delta^2). \end{aligned}
$$

同様にして，

$$
\Delta\phi(x,t) = \Delta\Phi(X,t) + O(\delta^2)
$$

が得られる．これらの式と (3.2) より

$$
\begin{aligned} (\partial_{n+1}\Phi)(x, 1+\eta(x,t), t) &= \delta^2\nabla b(x)\cdot\nabla\phi(x,t) - \delta^2\int_{b(x)}^{1+\eta(x,t)} \Delta\phi(x,t)\mathrm{d}z + O(\delta^4) \\ &= -\delta^2(1+\eta(x,t))\Delta\phi(x,t) + \delta^2\nabla\cdot\big(b(x)\nabla\phi(x,t)\big) + O(\delta^4). \end{aligned}
$$

したがって，$\gamma = 0$ の場合の定義式 (2.16) より次式が従う．

$$
(3.3) \qquad \big(\Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)\phi\big)(x,t) = -\nabla\cdot\big((1+\eta(x,t)-b(x))\nabla\phi(x,t)\big) + O(\delta^2).
$$

この DN 写像 $\Lambda^{\mathrm{DN}} = \Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)$ の δ^2 に関する形式的な展開は次の補題により数学的に厳密に正当化される．

補題 3.1 ([8]). $M, c > 0$ および $s > n/2$ とする．このとき，これらの定数のみに依存する正定数 C および δ_1 が存在し，任意の $\delta \in (0, \delta_1]$ および

$$\begin{cases} \|b\|_{s+2+1/2} + \|\eta\|_{s+2+1/2} \le M, \\ 1 + \eta(x) - b(x) \ge c \quad for \quad x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

を満たす任意の $\eta, b \in H^{s+2+1/2}(\mathbf{R}^n)$ に対して，次式が成り立つ．

$$\|\Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)\phi + \nabla \cdot ((1 + \eta - b)\nabla\phi)\|_s \le C\delta^2 \|\nabla\phi\|_{s+3}.$$

(2.20) の第 1 式および (3.3) より

$$\eta_t + \nabla \cdot \big((1 + \eta - b)\nabla\phi\big) = O(\delta^2).$$

以上のことから，(2.20) に対する近似方程式

$$\begin{cases} \eta_t + \nabla \cdot \big((1 + \eta - b)\nabla\phi\big) = O(\delta^2), \\ \phi_t + \eta + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = O(\delta^2) \end{cases}$$

が得られた．上式で $\delta^2 \to 0$ とすれば，次の浅水波方程式が得られる．

$$\begin{cases} \eta_t^0 + \nabla \cdot \big((1 + \eta^0 - b)\nabla\phi^0\big) = 0, \\ \phi_t^0 + \eta^0 + \frac{1}{2}|\nabla\phi^0|^2 = 0. \end{cases}$$

また，$u^0 := \nabla\phi^0$ と置き，上式の第 2 式の勾配を取れば，よく知られた次の形の浅水波方程式が得られる．

$$\begin{cases} \eta_t^0 + \nabla \cdot \big((1 + \eta^0 - b)u^0\big) = 0, \\ u_t^0 + (u^0 \cdot \nabla)u^0 + \nabla\eta^0 = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

ただし，u^0 は渦無し条件

$$\mathrm{rot}\, u^0 = 0$$

を満たす．ここで，$\mathrm{rot}\, u$ は $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ の回転であり，$\mathrm{rot}\, u = (\partial_j u_i - \partial_i u_j)_{1 \le i,j \le n}$ で定義される歪対称行列である．なお，浅水波方程式 (3.4) は n 次元空間における圧縮性 Euler 方程式で，状態方程式として $p(\rho) = \frac{1}{2}\rho^2$ を採用したときの方程式と全く同じ形をしていることを注意しておく．

3.2 $\beta_\tau \neq 0$ の場合

次に，水底が時間と共に変形する場合を考える．このとき，(2.20) に対する近似方程式を導出するためには，NN 写像 $\Lambda^{\mathrm{NN}} = \Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta, b, \delta)$ を δ^2 で展開する必要がある．水底 Σ 上で与えられた関数 γ に対して，境界値問題

$$\begin{cases} \Delta\Phi + \delta^{-2}\partial_{n+1}^2\Phi = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \Phi = 0 & \text{on} \quad \Gamma, \\ \delta^{-2}\partial_{n+1}\Phi - \nabla b \cdot \nabla\Phi = \gamma & \text{on} \quad \Sigma \end{cases}$$

の解を Φ と表わそう．このとき，

$$(\partial_{n+1}\Phi)(x,x_{n+1}) = (\partial_{n+1}\Phi)(x,b(x)) + \int_{b(x)}^{x_{n+1}} (\partial_{n+1}^2\Phi)(x,z)\mathrm{d}z \\ = \delta^2\gamma(x) + \delta^2\nabla b(x)\cdot(\nabla\Phi)(x,b(x)) - \delta^2\int_{b(x)}^{x_{n+1}}(\Delta\Phi)(x,z)\mathrm{d}z. \tag{3.5}$$

これより，$(\partial_{n+1}\Phi)(X) = O(\delta^2)$，それゆえ $(\nabla\partial_{n+1}\Phi)(X) = O(\delta^2)$ が従う．この式と

$$(\nabla\Phi)(x,x_{n+1}) = (\nabla\Phi)(x,1+\eta(x)) + \int_{1+\eta(x)}^{x_{n+1}}(\nabla\partial_{n+1}\Phi)(x,z)\mathrm{d}z \tag{3.6}$$

より，$(\nabla\Phi)(X) = (\nabla\Phi)(x,1+\eta(x)) + O(\delta^2)$ が従う．一方，水面 Γ 上の境界条件 $\Phi(x,1+\eta(x)) = 0$ を x で微分すると，

$$(\nabla\Phi)(x,1+\eta(x)) = -(\partial_{n+1}\Phi)(x,1+\eta(x))\nabla\eta(x) \tag{3.7}$$

となるが，これは $O(\delta^2)$ である．したがって，$\nabla\Phi(X) = O(\delta^2)$，それゆえ $\Delta\Phi(X) = O(\delta^2)$ が得られる．これらの式と (3.5) より，$(\partial_{n+1}\Phi)(X) = \delta^2\gamma(x) + O(\delta^4)$ となるが，これと (3.7) より，$(\nabla\Phi)(x,1+\eta(x)) = -\delta^2\gamma(x)\nabla\eta(x) + O(\delta^4)$ が得られる．したがって，(3.6) より

$$(\nabla\Phi)(X) = -\delta^2\gamma(x)\nabla\eta(x) - \delta^2(1+\eta(x)-x_{n+1})\nabla\gamma(x) + O(\delta^4).$$

特に，

$$(\Delta\Phi)(X) = -\delta^2\nabla\cdot\big(\gamma(x)\nabla\eta(x)\big) - \delta^2\nabla\eta(x)\cdot\nabla\gamma(x) - \delta^2(1+\eta(x)-x_{n+1})\Delta\gamma(x) + O(\delta^4).$$

したがって，(3.5) より

$$\begin{aligned}(\partial_{n+1}\Phi)(X) &= \delta^2\gamma(x) - \delta^4\nabla b(x)\cdot\big(\gamma(x)\nabla\eta(x) + (1+\eta(x)-b(x))\nabla\gamma(x)\big) \\ &\quad + \delta^4(x_{n+1}-b(x))\big(\nabla\cdot(\gamma(x)\nabla\eta(x)) + \nabla\eta(x)\cdot\nabla\gamma(x)\big) \\ &\quad - \frac{1}{2}\delta^4\big((1+\eta(x)-x_{n+1})^2 - (1+\eta(x)-b(x))^2\big)\Delta\gamma(x) + O(\delta^6).\end{aligned}$$

以上のことと，$\phi = 0$ の場合の定義式 (2.16) より次式が従う．

$$\Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta,b,\delta)\beta = \gamma + \delta^2\nabla\cdot\Big((1+\eta-b)(\nabla\eta)\gamma + \frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\gamma\Big) + O(\delta^4). \tag{3.8}$$

この NN 写像 $\Lambda^{\mathrm{NN}} = \Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta,b,\delta)$ の δ^2 に関する形式的な展開は次の補題により数学的に厳密に正当化される．

補題 3.2 ([9]). $M, c > 0$ および $s > n/2 - 2$ とする．このとき，これらの定数のみに依存する正定数 C および δ_1 が存在し，任意の $\delta \in (0,\delta_1]$ および

$$\begin{cases} \|b\|_{s+4} + \|\eta\|_{s+4} \le M, \\ 1+\eta(x)-b(x) \ge c \quad for \quad x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

を満たす任意の $\eta, b \in H^{s+4}(\mathbf{R}^n)$ に対して，次式が成り立つ．

$$\Big\|\Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta,b,\delta)\gamma - \gamma - \delta^2\nabla\cdot\Big((1+\eta-b)(\nabla\eta)\gamma + \frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\gamma\Big)\Big\|_s \le C\delta^4\|\gamma\|_{s+4}.$$

津波モデル (1.1)–(1.2) を形式的に導くだけであれば，展開式 $\Lambda^{\mathrm{NN}}\gamma = \gamma + O(\delta^2)$ だけで十分である．しかし，その津波モデルの数学的に厳密な正当性を与えるためには，NN 写像の $O(\delta^2)$ の項の具体形を知る必要がある．

(3.3) および (3.8) より，(2.20) は次の常微分方程式系で近似されることが分かる．

$$\text{(3.9)} \qquad \begin{cases} \eta_t = \frac{1}{\varepsilon}\beta_\tau + \frac{1}{\varepsilon}O(\varepsilon + \delta^2), \\ \phi_t = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 \beta_\tau^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}O(\varepsilon^2 + \delta^4). \end{cases}$$

この常微分方程式系を初期条件 (2.21) の下で解くと，時間区間 $0 \le t \le \varepsilon$ において

$$\text{(3.10)} \qquad \begin{cases} \eta(x,t) = \eta_0(x) + \beta(x, t/\varepsilon) - b_0(x) + O(\varepsilon + \delta^2), \\ \phi(x,t) = \phi_0(x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^{t/\varepsilon} \beta_\tau(x,\tau)^2 \mathrm{d}\tau + \dfrac{1}{\varepsilon}O(\varepsilon^2 + \delta^4) \end{cases}$$

が得られる．特に，海底地震が止まる時刻 $t = \varepsilon$ において

$$\text{(3.11)} \qquad \begin{cases} \eta(x,\varepsilon) = \eta_0(x) + \big(b_1(x) - b_0(x)\big) + O(\varepsilon + \delta^2), \\ \phi(x,\varepsilon) = \phi_0(x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta^2}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^{1} \beta_\tau(x,\tau)^2 \mathrm{d}\tau + \dfrac{1}{\varepsilon}O(\varepsilon^2 + \delta^4). \end{cases}$$

$\delta, \varepsilon \to +0$ のとき，これらが収束するためには δ^2/ε もまたある値 σ に収束しなければならない．つまり，ε が δ^2 よりも非常に小さくなるような非常に速い海底変形が起こる場合には，速度場が発散してしまい，形式的な議論さえできなくなってしまう．このような場合には，津波モデル (1.1)–(1.2) が現象を近似することは期待できないであろう．しかし，実際のデータを見てみると，そのような状況はあまり起こりそうもないので，以下ではその場合は考えないことにする．したがって，ここでは初期値問題 (2.20)–(2.21) の解 $(\eta^{\delta,\varepsilon}, \phi^{\delta,\varepsilon})$ の

$$\text{(3.12)} \qquad \delta, \varepsilon \to +0, \quad \frac{\delta^2}{\varepsilon} \to \sigma$$

における振る舞いを調べることにする．

一方，$t > \varepsilon$ のときには，$\beta_\tau = 0$ および $b = b_1$ であるから，先に見て来たように (2.20) は偏微分方程式系

$$\text{(3.13)} \qquad \begin{cases} \eta_t + \nabla\cdot\big((1 + \eta - b_1)\nabla\phi\big) = O(\delta^2), \\ \phi_t + \eta + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = O(\delta^2) \end{cases}$$

で近似される．そこで，(3.13) および (3.11) において極限 (3.12) をとると，

$$\begin{cases} \eta_t^0 + \nabla\cdot\big((1 + \eta^0 - b_1)\nabla\phi^0\big) = 0, \\ \phi_t^0 + \eta^0 + \frac{1}{2}|\nabla\phi^0|^2 = 0, \end{cases}$$

$$\eta^0 = \eta_0 + (b_1 - b_0), \quad \phi^0 = \phi_0 + \frac{\sigma}{2}\int_0^1 \beta_\tau(\cdot,\tau)^2 \mathrm{d}\tau \quad \text{at} \quad t = 0$$

が得られる．そして，$u^0 := \nabla\phi^0$ と置けば，浅水波方程式に対する初期値問題

$$\left\{\begin{array}{l} \eta_t^0 + \nabla\cdot\big((1+\eta^0-b_1)u^0\big) = 0, \\ u_t^0 + (u^0\cdot\nabla)u^0 + \nabla\eta^0 = 0, \end{array}\right. \tag{3.14}$$

$$\eta^0 = \eta_0 + (b_1 - b_0), \quad u^0 = \nabla\phi_0 + \nabla\left(\frac{\sigma}{2}\int_0^1 \beta_\tau(\cdot,\tau)^2 \mathrm{d}\tau\right) \quad \text{at} \quad t=0 \tag{3.15}$$

が従う．ただし，u^0 は渦無し条件

$$\operatorname{rot} u^0 = 0 \tag{3.16}$$

を満たす．$(\eta_0,\phi_0)=0$ および $\sigma=0$ の場合，(3.14) および (3.15) を次元のある変数を用いて書き直すと，通常の津波モデル (1.1)–(1.2) が得られる．また，$\sigma \neq 0$ の場合には，(1.2) が (1.3) に置き変わる．

4 主要結果

主定理を述べる前に，一般化された Rayleigh–Taylor の符号条件について調べていく．よく知られているように，水面 $\Gamma(t)$ 上での符号条件

$$-\frac{\partial p}{\partial N} \geq c_0 > 0$$

が満たされないと，水の波に対する初期値問題 (2.6)–(2.9) の適切性は一般には失われてしまう．ここで，p は圧力，N は外向き単位外法線ベクトルである．つまり，これは水面上で法線方向に沿って水の内部に向かっていくとき，圧力は真に増大していなければならない，という条件である．これが一般化された Rayleigh–Taylor の符号条件と呼ばれている条件である．この条件については，例えば J.T. Beale–T.Y. Hou–J.S. Lowengrub [2] を参照して頂きたい．S. Wu [20, 21] は，深さが無限の水の波の場合，鉛直下向きの重力が働いていれば，どんな形の水面でも自己交差しておらず滑らかであれば，たとえ波がグラフではなく覆いかぶさっているような場合でも，この条件が常に満たされることを証明した．著者にはこの結果が意外であり，非常に驚いたことを覚えている．水底がある場合には，この条件が常に成り立つとは信じられていないが，D. Lannes [14] はこの条件と水底の形状との関係を与えている．ただし，この条件が破綻してしまうような具体例は今のところ与えられていないようである．A. Constantin–W. Strauss [3] は水平な水底がある場合の Stokes 波の圧力を詳しく調べ，Stokes 波に対してもこの一般化された Rayleigh–Taylor の符号条件が満たされることを確認している．

水の波ではないが，D.G. Ebin [5] の結果も紹介しておこう．その論文では，ほぼ剛体回転しており，かつ周りを自由境界で囲まれた非圧縮性かつ非粘性流体の運動を調べ，その初期値問題は非適切であることを示している．この場合，一般化された Rayleigh–Taylor の符号条件は破錠している．このようなことが起きた原因は，渦度の存在のためであろう

と予想したくなるが，たとえ渦無しであっても回転流を考えるとその条件は破綻する場合がある．実際，筆者はある物体の周りにある非圧縮性かつ非粘性流体の渦無しの回転流を考察し，もし回転の速さが物体からの重力よりも大きくなってしまうと，一般化されたRayleigh–Taylor の符号条件は満たされなくなってしまい，その結果，その初期値問題が非適切であることを示した．

以下で，この重要な条件が極限 (3.12) でどうなるかを調べていく．そのために，一般化された Bernoulli の定理

$$\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla_X \Phi|^2 + \frac{1}{\rho}(p - p_0) + g(x_{n+1} - h) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega(t) \tag{4.1}$$

を用いる．まず，この式を無次元化しよう．圧力 p を $p = p_0 + \rho g h \tilde{p}$ により無次元化する．この式と (2.10) を (4.1) に代入し，記号˜を消去すると

$$-p = \Phi_t + \frac{1}{2}\big(|\nabla\Phi|^2 + \delta^{-2}(\partial_{n+1}\Phi)^2\big) + (x_{n+1} - 1). \tag{4.2}$$

さらに，この無次元変数に対して一般化された Rayleigh–Taylor の符号条件は $a \geq c_0 > 0$ と書ける．ここで，

$$\begin{aligned} a &:= -(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_{n+1}p - \delta^2\nabla\eta\cdot\nabla p)|_{\Gamma(t)} \\ &= -(\partial_{n+1}p)|_{\Gamma(t)} \\ &= 1 + \Big\{\partial_{n+1}\Big(\Phi_t + \frac{1}{2}\big(|\nabla\Phi|^2 + \delta^{-2}(\partial_{n+1}\Phi)^2\big)\Big)\Big\}\Big|_{\Gamma(t)} \\ &= 1 + \big(\partial_{n+1}\Phi_t + \nabla\Phi\cdot\nabla\partial_{n+1}\Phi - (\partial_{n+1}\Phi)\Delta\Phi\big)\big|_{\Gamma(t)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

上の計算では，関係式 $(\nabla Q)|_{\Gamma(t)} = \nabla(Q|_{\Gamma(t)}) - (\partial_{n+1}Q)|_{\Gamma(t)}\nabla\eta$, 水面上での境界条件 (2.12), および Laplace 方程式 (2.11) を用いた．

次に，この関数 a の極限 (3.12) での漸近形を求めていく．それゆえ，以下では $\delta^2 = O(\varepsilon)$ を仮定してよい．また，Φ は (2.11), (2.13), および (2.17) を満たしており，(2.14) が成り立っていることを思い出そう．したがって，前節と同様の計算により

$$\nabla\Phi = \nabla\phi - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta - \frac{\delta^2}{\varepsilon}(1 + \eta - x_{n+1})\nabla\beta_\tau + O(\delta^2),$$

それゆえ

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}\Phi = \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau &+ \delta^2\nabla b\cdot\Big(\nabla\phi - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta - \frac{\delta^2}{\varepsilon}(1+\eta-b)\nabla\beta_\tau\Big) \\ &- \delta^2(x_{n+1} - b)\Big(\nabla\cdot\Big(\nabla\phi - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta\Big) - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\nabla\eta\cdot\nabla\beta_\tau\Big) \\ &- \frac{\delta^2}{2}\frac{\delta^2}{\varepsilon}\big((1+\eta-x_{n+1})^2 - (1+\eta-b)^2\big)\Delta\beta_\tau + O(\delta^4) \end{aligned}$$

が得られる．(3.9) より，$\eta_t = \frac{1}{\varepsilon}\beta_\tau + O(1)$, $\phi_t = \frac{1}{2}\big(\frac{\delta}{\varepsilon}\big)^2\beta_\tau^2 + O(1)$, および $\nabla\phi_t - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta_t =$

$O(1)$ が従う．したがって，

$$
\begin{aligned}
&(\partial_{n+1}\Phi_t)|_{\Gamma(t)} \\
&= \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 (1-\delta^2|\nabla\eta|^2)\beta_{\tau\tau} + \frac{\delta^2}{\varepsilon}\nabla\cdot\Big(\beta_\tau\Big((\nabla\phi - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta\Big)\Big) - \left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^2 \beta_\tau\nabla\eta\cdot\nabla\beta_\tau \\
&\quad + \left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^2 \nabla\cdot\Big((1+\eta-b)\beta_{\tau\tau}\nabla\eta + \frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta_{\tau\tau}\Big) + O(\delta^2).
\end{aligned}
$$

これらを (4.3) に代入すれば

$$
\begin{aligned}
a = 1 &+ \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 (1-\delta^2|\nabla\eta|^2)\beta_{\tau\tau} + 2\frac{\delta^2}{\varepsilon}\Big(\nabla\phi - \frac{\delta^2}{\varepsilon}\beta_\tau\nabla\eta\Big)\cdot\nabla\beta_\tau \\
&+ \left(\frac{\delta^2}{\varepsilon}\right)^2 \nabla\cdot\Big((1+\eta-b)(\nabla\eta)\beta_{\tau\tau} + \frac{1}{2}(1+\eta-b)^2\nabla\beta_{\tau\tau}\Big) + O(\delta^2).
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

一方，(3.10) および (3.12) を考慮して，速い時間変数 $\tau = t/\varepsilon$ に関する近似解 $(\eta^{(0)}, \phi^{(0)})$ を

$$
\begin{cases}
\eta^{(0)}(x,\tau) := \eta_0(x) + \beta(x,\tau) - \beta(x,0), \\
\phi^{(0)}(x,\tau) := \phi_0(x) + \dfrac{\sigma}{2}\displaystyle\int_0^\tau \beta_\tau(x,\tilde\tau)^2 \mathrm{d}\tilde\tau
\end{cases} \tag{4.5}
$$

で定めると，少なくとも形式的には，$(x,t)\in\mathbf{R}^n\times[0,\varepsilon]$ に対して

$$
\begin{cases}
\eta(x,t) = \eta^{(0)}(x,t/\varepsilon) + O(\varepsilon), \\
\phi(x,t) = \phi^{(0)}(x,t/\varepsilon) + o(1)
\end{cases}
$$

が成り立つ．このことと (4.4) を考慮して，関数 $a^{(0)} = a^{(0)}(x,\tau)$ を

$$
\begin{aligned}
a^{(0)} := {}& 2(\nabla\phi^{(0)} - \sigma\beta_\tau\nabla\eta^{(0)})\cdot\nabla\beta_\tau \\
&+ \sigma\nabla\cdot\Big((1+\eta^{(0)}-\beta)(\nabla\eta^{(0)})\beta_{\tau\tau} + \frac{1}{2}(1+\eta^{(0)}-\beta)^2\nabla\beta_{\tau\tau}\Big)
\end{aligned}
$$

で定める．ただし，$(\eta^{(0)}, \phi^{(0)})$ は (4.5) で定義された近似解である．この関数 $a^{(0)}$ は，初期値 (η_0, ϕ_0)，水底の凹凸を表わす関数 β, および極限 (3.12) における定数 σ を用いて具体的に書き下せていることに注意しよう．このとき，(4.4) より

$$
\begin{aligned}
a(x,t) = 1 &+ \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 \Big(1-\delta^2(|\nabla\eta^{(0)}(x,t/\varepsilon)|^2 + C)\Big)\beta_{\tau\tau}(x,t/\varepsilon) \\
&+ \sigma\Big(a^{(0)}(x,t/\varepsilon) + C\sigma\beta_{\tau\tau}(x,t/\varepsilon)\Big) + o(1).
\end{aligned}
$$

ここで，$C>0$ は任意定数である．したがって，次に述べる条件を仮定すれば，一般化された Rayleigh–Taylor の符号条件が満たされることが分かる．その条件は，δ と ε の関係に依存している．

仮定 4.1 定数 $C, c > 0$ が存在し，任意の $(x, \tau) \in \mathbf{R}^n \times (0,1)$ に対して以下の条件が満たされている．

(1) $\delta/\varepsilon \to 0$ の場合: 条件なし．

(2) $\delta/\varepsilon \to \nu$ の場合: $1 + \nu^2 \beta_{\tau\tau}(x,\tau) \geq c$.

(3) $\delta/\varepsilon \to \infty$ かつ $\delta^2/\varepsilon \to 0$ の場合: $\beta_{\tau\tau}(x,\tau) \geq 0$.

(4) $\delta/\varepsilon \to \infty$ かつ $\delta^2/\varepsilon \to \sigma$ の場合: $\beta_{\tau\tau}(x,\tau) \geq 0$ かつ $1 + \sigma\big(a^{(0)} + \sigma C \beta_{\tau\tau}\big)(x,\tau) \geq c$.

また，技術的な観点から，次の条件を仮定する．

仮定 4.2 任意の $(x, \tau) \in \mathbf{R}^n \times (0,1)$ に対して以下の条件が満たされている．

(1) $\delta/\varepsilon \to \nu$ の場合: 条件なし．

(2) $\delta/\varepsilon \to \infty$ の場合: $\beta_{\tau\tau\tau}(x,\tau) \leq 0$.

次の定理は主結果の一つであり，水の波の初期値問題に対する解の存在と，時間区間 $[0,\varepsilon]$ のおけるその解の δ および ε に関する一様評価が成り立つことを保証している．

定理 4.1 ([9]). *$M_0, c_0 > 0$, $r > n/2$, および $s > (n+9)/2$ とする．仮定 4.1 および 4.2 の下, 定数 $C_0, \delta_0, \varepsilon_0, \gamma_0 > 0$ が存在し，$|\delta^2/\varepsilon - \sigma| \leq \gamma_0$ を満たす任意の $\delta \in (0, \delta_0]$ と $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, および (2.14) と*

$$\begin{cases} \|\beta(\tau)\|_{s+9/2} + \|\beta_\tau(\tau)\|_{s+5} + \|\beta_{\tau\tau}(\tau)\|_{s+1} + \|\beta_{\tau\tau\tau}(\tau)\|_{r+2} \leq M_0, \\ \|\nabla\phi_0\|_{s+3} + \|\eta_0\|_{s+4} \leq M_0, \ \ 1 + \eta_0(x) - b_0(x) \geq c_0 \quad for \quad (x,\tau) \in \mathbf{R}^n \times (0,1) \end{cases}$$

を満たす任意の (η_0, ϕ_0) および b に対して，初期値問題 (2.20)–(2.21) は時間区間 $[0,\varepsilon]$ で一意な解 $(\eta, \phi) = (\eta^{\delta,\varepsilon}, \phi^{\delta,\varepsilon})$ をもつ．また，その解は以下の評価を満たす.

$$\begin{cases} \|\eta^{\delta,\varepsilon}(t) - \eta^{(0)}(t/\varepsilon)\|_{s+2} + \|\phi^{\delta,\varepsilon}(t) - \phi^{(0)}(t/\varepsilon)\|_{s+2} \leq C_0(\varepsilon + |\delta^2/\varepsilon - \sigma|), \\ \|\eta^{\delta,\varepsilon}(t)\|_{s+3} + \|\nabla\phi^{\delta,\varepsilon}(t)\|_{s+2} \leq C_0, \\ 1 + \eta^{\delta,\varepsilon}(x,t) - b(x,t) \geq c_0/2 \qquad for \qquad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times [0,\varepsilon]. \end{cases}$$

ここで，$(\eta^{(0)}, \phi^{(0)})$ は (4.5) で定義される，速い時間変数 $\tau = t/\varepsilon$ に関する近似解である．

一旦このような一様評価を伴った解の存在定理が得られれば，[8] において得られている水底が固定されている場合の解の存在定理と解の一様評価を組み合わせることにより，解 $(\eta^{\delta,\varepsilon}, \phi^{\delta,\varepsilon})$ の極限 $\delta, \varepsilon \to 0$ における振る舞いを容易に調べることができる．

定理 4.2 ([9]). *定理 4.1 と同じ仮定の下，$\delta \in (0, \delta_0]$ および $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に無関係な時刻 $T > 0$ が存在し，定理 4.1 において得られている解 $(\eta^{\delta,\varepsilon}, \phi^{\delta,\varepsilon})$ は時間区間 $[0, T]$ にまで延長することができる．さらに，その解は次の評価を満たす.*

$$\|\eta^{\delta,\varepsilon}(t) - \eta^0(t)\|_{s-1} + \|\nabla\phi^{\delta,\varepsilon}(t) - u^0(t)\|_{s-1} \leq C_0(\varepsilon + |\delta^2/\varepsilon - \sigma|) \qquad for \qquad \varepsilon \leq t \leq T.$$

ここで，(η^0, u^0) は浅水波方程式の初期値問題 (3.14) および (3.15) の解である．また，u^0 は渦無し条件 (3.16) を満たす.

この定理により，$\delta^2 \ll \varepsilon \ll 1$ という状況下では，通常の津波モデル (1.1)–(1.2) がよい近似を与えることが保証される．さらに，$\delta^2 \simeq \varepsilon \ll 1$ という状況下では，(1.3) という形の初期速度場の影響を考慮しなければならないことが分かる．

5　線形化問題とエネルギー評価

津波モデルの数学的に厳密な正当性を与える上で最も困難な部分は，水の波の初期値問題 (2.20)–(2.21) の解の存在を示すことと，無次元数 δ と ε に関する解の一様評価を導くことである．その解の一様評価は，DN 写像 Λ^{DN} と NN 写像 Λ^{NN} の精密な解析を通してエネルギー評価を行うことにより得られる．我々の問題に対してどのようにエネルギー評価を行うかを説明するために，方程式系 (2.20) を任意の流れ (η, ϕ) の周りで線形化した方程式系を考えることにしよう．D. Lannes [14] に従い，方程式系 (2.20) を (η, ϕ) の周りで線形化する．そのためには，DN 写像 $\Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)$ と NN 写像 $\Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta, b, \delta)$ の η に関する変分を計算しなくてはならない．次の補題は D. Lannes [14] の DN 写像に対する結果を，NN 写像もある場合に拡張したものである．

補題 5.1 ([9]). 写像 $\Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)$ および $\Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta, b, \delta)$ の η に関する変分は次式で与えられる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\bigl(\Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta + h\check{\eta}, b, \delta)\phi + \Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta + h\check{\eta}, b, \delta)\gamma\bigr)\Big|_{h=0} = -\delta^2 \Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)(Z\check{\eta}) - \nabla \cdot (v\check{\eta}).$$

ここで，

$$\begin{cases} Z = (1 + \delta^2 |\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)\phi + \Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta, b, \delta)\gamma + \nabla\eta \cdot \nabla\phi), \\ v = \nabla\phi - \delta^2 Z \nabla\eta. \end{cases}$$

この補題より，(η, ϕ) の変分を $(\check{\eta}, \check{\phi})$ として

$$\zeta := \check{\eta}, \qquad \psi := \check{\phi} - \delta^2 Z \check{\eta}$$

とおくと，これらは次の方程式系を満たすことが分かる．

$$\begin{cases} \psi_t + v \cdot \nabla\psi + a\zeta = 0, \\ \zeta_t + \nabla \cdot (v\zeta) - \Lambda^{\mathrm{DN}}\psi = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

ここで，$\Lambda^{\mathrm{DN}} = \Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)$ および

$$\begin{cases} Z = (1 + \delta^2 |\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta, b, \delta)\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{\mathrm{NN}}(\eta, b, \delta)\beta_\tau + \nabla\eta \cdot \nabla\phi), \\ v = \nabla\phi - \delta^2 Z \nabla\eta, \\ a = 1 + \delta^2 (Z_t + v \cdot \nabla Z). \end{cases} \tag{5.2}$$

この関数 Z および v は，それぞれ，速度ポテンシャル Φ を用いて $\delta^2 Z = (\partial_{n+1}\Phi)|_{\Gamma(t)}$ および $v = (\nabla\Phi)|_{\Gamma(t)}$ という関係式を満たす．したがって，$\delta^2 Z$ および v は，それぞれ，水面

上での速度場の鉛直成分および水平成分を表わしている．さらに，関数 a は (4.2) における圧力 p を用いて次のように書ける．

$$a = -(1+\delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\partial_{n+1}p - \delta^2\nabla\eta\cdot\nabla p)|_{\Gamma(t)}.$$

それゆえ，一般化された Rayleigh–Taylor の符号条件により，関数 a の正値性が保証される．

$$a(x,t) \geq c_0 > 0 \qquad \text{for} \quad x \in \mathbf{R}^n,\ 0 \leq t \leq T.$$

線形化方程式系 (5.1) に対するエネルギーを定義するためには，DN 写像 Λ^{DN} に関する性質を調べておく必要がある．

$(n+1)\times(n+1)$ 行列 I_δ を

$$I_\delta = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}$$

で定める．ここで，E_n は $n\times n$ 単位行列である．この行列 I_δ を用いると，定義 2.1 における $\gamma = 0$ の場合の境界値問題 (2.15) を次のように書き直せる．

$$\begin{cases} \nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi = 0 & \text{in} \quad \Omega, \\ \Phi = \phi & \text{on} \quad \Gamma, \\ N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi = 0 & \text{on} \quad \Sigma. \end{cases}$$

補題 5.2 *DN 写像* $\Lambda^{\mathrm{DN}} = \Lambda^{\mathrm{DN}}(\eta,b,\delta)$ は $L^2(\mathbf{R}^n)$ における対称作用素である．すなわち，任意の $\phi,\psi \in H^1(\mathbf{R}^n)$ に対して次式が成り立つ．

$$(\Lambda^{\mathrm{DN}}\phi,\psi) = (\phi,\Lambda^{\mathrm{DN}}\psi).$$

Proof. この補題は簡単に証明できるので，その証明を紹介しておく．$\Phi := (\phi^\hbar, 0)$ および $\Psi := (\psi^\hbar, 0)$ とおく．このとき，Green の公式より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \big((\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi - \Phi(\nabla_X\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi)\big)\mathrm{d}X \\ &= \int_\Gamma \big((N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi)\Psi - \Phi(N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi)\big)\mathrm{d}S. \end{aligned}$$

ここで，N は $\partial\Omega$ に対する単位外法線ベクトルである．上の計算では，水底 Σ での境界条件を用いている．水面 Γ 上では，$\Phi=\phi$, $\Psi=\psi$ および

$$\begin{cases} \sqrt{1+|\nabla\eta|^2}N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Phi = \Lambda^{\mathrm{DN}}\phi, \\ \sqrt{1+|\nabla\eta|^2}N\cdot I_\delta^2\nabla_X\Psi = \Lambda^{\mathrm{DN}}\psi, \\ \mathrm{d}S = \sqrt{1+|\nabla\eta|^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

であることに注意すれば望みの等式が従う．□

補題 5.3 任意の $\phi \in H^1(\mathbf{R}^n)$ に対して，$(\Lambda^{\mathrm{DN}}\phi, \phi) = \|I_\delta \nabla_X \Phi\|^2_{L^2(\Omega)}$ が成り立つ．ただし，$\Phi = (\phi^\hbar, 0)$.

Proof. Green の公式より

$$0 = \int_\Omega (\nabla_X \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi)\Phi \,\mathrm{d}X = \int_{\partial\Omega} (N \cdot I_\delta^2 \nabla_X \Phi)\Phi \,\mathrm{d}S - \int_\Omega |I_\delta \nabla_X \Phi|^2 \,\mathrm{d}X.$$

これと境界条件より，望みの等式が従う．□

これら二つの補題より，DN 写像 Λ^{DN} は $L^2(\mathbf{R}^n)$ における正値作用素であることが分かる．さて，簡単のために $v = 0$ の場合の線形化方程式系 (5.1) を考えよう．すなわち，

$$\begin{cases} \psi_t + a\zeta = 0, \\ \zeta_t - \Lambda^{\mathrm{DN}}\psi = 0. \end{cases}$$

これは行列を用いて

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \zeta \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\Lambda^{\mathrm{DN}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \zeta \end{pmatrix} = 0$$

あるいは

$$\mathscr{A}_0 U_t + \mathscr{A}_1 U = 0$$

と書ける．ここで，$U = (\psi, \zeta)^T$ および

$$\mathscr{A}_0 = \begin{pmatrix} \Lambda^{\mathrm{DN}} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda^{\mathrm{DN}} a \\ -a\Lambda^{\mathrm{DN}} & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathscr{A}_0$ は $L^2(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)$ 上の正値作用素であり，$\mathscr{A}_1$ は歪対称作用素である．すなわち，$\mathscr{A}_1^* = -\mathscr{A}_1$ が成り立つ．このことは，作用素 $\mathscr{A}_0$ が線形化方程式系の symmetrizer であることを意味している．したがって，対応するエネルギー関数はその 2 次形式

$$E(t) := (\mathscr{A}_0 U, U) = (\Lambda^{\mathrm{DN}}\psi, \psi) + (a\zeta, \zeta)$$

で定義される．実際，線形化方程式系 (5.1) の任意の滑らかな解 (ψ, ζ) に対して

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = ([\partial_t, \Lambda^{\mathrm{DN}}]\psi, \psi) - 2(\Lambda^{\mathrm{DN}}\psi, v \cdot \nabla\psi) + (a_t\zeta, \zeta) + ((v \cdot \nabla a - a\nabla \cdot v)\zeta, \zeta)$$

が成り立つ．ここで，(5.2) および補題 3.1 と 3.2 より

$$a(x,t) = \frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\beta_{\tau\tau}(x, t/\varepsilon) + O(1),$$

それゆえ

$$a_t(x,t) = \frac{\delta^2}{\varepsilon^3}\beta_{\tau\tau\tau}(x, t/\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}O(1) \le \frac{1}{\varepsilon}O(1).$$

上の計算で仮定4.2を用いたことに注意しよう．詳細は省略するが，最終的には次の不等式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \le \frac{C}{\varepsilon}E(t).$$

したがって，Gronwallの不等式より $0 \le t \le \varepsilon$ において $E(t) \le \mathrm{e}^{Ct/\varepsilon}E(0) \le \mathrm{e}^{C}E(0)$ が成り立つ．これが線形化方程式系に対する解の一様評価の一例である．

元の非線形問題に対する解の一様評価を導くためには，非線形方程式系を何回か微分し，解の導関数に対して準線形方程式系を導き，それに対して，上のようなエネルギー評価を適用するのである．詳細は [9] を参照して頂きたい．

References

[1] G.B. Airy, Tides and waves, Encyclopaedia metropolitana, London, **5** (1845), 241–396.

[2] J.T. Beale, T.Y. Hou, and J.S. Lowengrub, Growth rates for the linearized motion of fluid interfaces away from equilibrium, Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 1269–1301.

[3] A. Constantin and W. Strauss, Pressure beneath a Stokes wave, Comm. Pure Appl. Math., **63** (2010), 533–557.

[4] B. Alvarez-Samaniego and D. Lannes, Large time existence for 3D water-waves and asymptotics, Invent. Math., **171** (2008), 485–541.

[5] D.G. Ebin, The equations of motion of a perfect fluid with free boundary are not well posed, Comm. Partial Differential Equations, **12** (1987), 1175–1201.

[6] K.O. Friedrichs, On the derivation of the shallow water theory, Appendix to: "The formulation of breakers and bores" by J.J. Stoker in Comm. Pure Appl. Math., **1** (1948), 1–87.

[7] T. Iguchi, On the irrotational flow of incompressible ideal fluid in a circular domain with free surface, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **34** (1998), 525–565.

[8] T. Iguchi, A shallow water approximation for water waves, J. Math. Kyoto Univ., **49** (2009), 13–55.

[9] T. Iguchi, A mathematical analysis of tsunami generation in shallow water due to seabed deformation, to appear in Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.

[10] T. Kano, Une théorie trois-dimensionnelle des ondes de surface de l'eau et le développement de Friedrichs, J. Math. Kyoto Univ., **26** (1986), 101–155 and 157–175 [French].

[11] T. Kano and T. Nishida, Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, J. Math. Kyoto Univ., (1979) **19**, 335–370 [French].

[12] T. Kano and T. Nishida, Water waves and Friedrichs expansion. Recent topics in nonlinear PDE, 39–57, North-Holland Math. Stud., 98, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[13] H. Lamb, Hydrodynamics, 6th edition, Cambridge University Press.

[14] D. Lannes, Well-posedness of the water-waves equations, J. Amer. Math. Soc., **18** (2005), 605–654.

[15] Y.A. Li, A shallow-water approximation to the full water wave problem, Comm. Pure Appl. Math., **59** (2006), 1225–1285.

[16] V.I. Nalimov, The Cauchy-Poisson problem, Dinamika Splošn. Sredy, **18** (1974), 104–210 [Russian].

[17] L.V. Ovsjannikov, To the shallow water theory foundation, Arch. Mech., **26** (1974), 407–422.

[18] L.V. Ovsjannikov, Cauchy problem in a scale of Banach spaces and its application to the shallow water theory justification. Applications of methods of functional analysis to problems in mechanics, 426–437. Lecture Notes in Math., 503. Springer, Berlin, 1976.

[19] J.J. Stoker, Water waves: the mathematical theory with application, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York.

[20] S. Wu, Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 2-D, Invent. Math., **130** (1997), 39–72.

[21] S. Wu, Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D, J. Amer. Math. Soc., **12** (1999), 445–495.

[22] S. Wu, Almost global wellposedness of the 2-D full water wave problem, Invent. Math., **177** (2009), 45–135.

[23] H. Yosihara, Gravity waves on the free surface of an incompressible perfect fluid of finite depth, Publ. RIMS Kyoto Univ., **18** (1982), 49–96.

[24] 土木学会津波研究小委員会編, 津波から生き残る–その時までに知ってほしいこと, 2009, 丸善.