

研究集会「偏微分方程式と現象： PDEs and Phenomena in Miyazaki 2010」



協賛：科学研究費補助金基盤研究 (S)「非線形非平衡反応拡散系理論の確立：
Mathematical Theory of Nonlinear-Non-equilibrium Reaction-Diffusion Systems」

日時：2010 年 11 月 20 日 (土) ~ 11 月 21 日 (日)

会場：宮崎大学工学部 B 棟 2 階 B209 教室

ポスターセッション兼休憩室 B210 教室

案内：<http://www.miyazaki-u.ac.jp/~math/ppm/>

11 月 20 日 (土)

14:00-14:55 三村 昌泰 (明治大学 / 基盤 (S) 代表)

「微小重力環境でのすす燃焼のモデル支援解析」

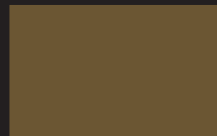
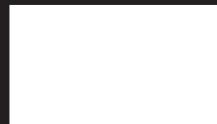
15:15-16:10 中山まどか (東北大学)

「Marciniak によるヒドラ頭部再生モデルの
単調定常解の集合の構造」

16:30-17:25 吉村 和之

(NTT コミュニケーション科学基礎研究所)

「1 次元非線形格子における Discrete Breather の
存在と安定性」



11 月 21 日 (日)



9:00-10:30 ポスターセッション (明治大学)

10:45-12:15 PPM2010 特別実験講座

伊達 章 (宮崎大学)

「メトロノームの同期現象」



14:00-14:55 八柳 祐一 (静岡大学)

「絶対温度が負となる点渦系に関する力学的考察

～専用計算機を用いたダイレクトシミュレーション結果, および解析的結果～」

15:15-16:10 柳沢 卓 (奈良女子大学)

「多重連結領域における定常 Navier-Stokes 方程式の境界値問題」

16:30-17:25 井口 達雄 (慶応大学)

「海底変動による津波生成の数学解析」



アブストラクト

研究集会 「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2010 (略称：PPM2010) 」

協賛 科学研究費補助金・基盤研究 (S)

「非線形非平衡反応拡散系理論の確立：

Mathematical Theory of

Nonlinear-Non-equilibrium Reaction-Diffusion Systems

(略称：NNRDS) 」

日時： 2010 年 11 月 20 日 (土) ～ 11 月 21 日 (日)

会場： 宮崎大学工学部 B 棟 2 階 B209 教室

ポスターセッション兼休憩室 B210 教室

案内： <http://www.miyazaki-u.ac.jp/~math/ppm/>

プログラム

11 月 20 日 (土)

午後の部

14:00-14:55 **三村 昌泰** (明治大学・基盤研究 (S) 代表)

「微小重力環境でのすす燃焼のモデル支援解析」

15:15-16:10 **中山まどか** (東北大学)

「Marciniak によるヒドラ頭部再生モデルの単調定常解の集合の構造」

16:30-17:25 **吉村 和之** (NTT コミュニケーション科学基礎研究所)

「1 次元非線形格子における Discrete Breather の存在と安定性」

11月21日(日)

午前の部

≪ ポスターセッション (明治大学) ≫

9:00-10:30 佐合 洋彰「OV モデルによる交通流の研究」

澁谷 幸樹「バクテリアの運動」

田中 吉太郎「ひまわりの葉序形成」

増井 翼「人の避難時に生じるアーチ構造解析」

≪ PPM2010 特別実験講座 ≫

10:45-12:15 伊達 章 (宮崎大学)

「メトロノームの同期現象 +」

午後の部

14:00-14:55 八柳 祐一 (静岡大学)

「絶対温度が負となる点渦系に関する力学的考察

～専用計算機を用いたダイレクトシミュレーション結果、および解析的結果～」

15:15-16:10 柳沢 卓 (奈良女子大学)

「多重連結領域における定常 Navier-Stokes 方程式の境界値問題」

16:30-17:25 井口 達雄 (慶応大学)

「A mathematical analysis of tsunami generation

in shallow water due to seabed deformation」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金 (基盤 (S) : 三村 ; 基盤 (C) : 辻川, 飯田, 北, 大塚, 伊達 ; 若手 (B) : 矢崎) の援助を受けています。

課題番号	研究代表者	課題名
18104002	三村昌泰	非線形非平衡反応拡散系理論の確立
20540122	辻川 亨	反応拡散方程式の大域的解構造と縮約系についての研究
20540200	飯田雅人	界面を追跡しやすい反応拡散系の構築
20540181	北 直泰	非線形シュレディンガー方程式の特異性解析
22540231	大塚浩史	平衡点渦系の平均場と点渦系の関連の探求
22500206	伊達 章	高次元データに対する事後確率分布構造の解析
21740079	矢崎成俊	移動境界の数値的追跡法, そして界面運動の数理解析に関する研究

世話人 : 辻川 亨, 飯田雅人, 北 直泰, 大塚浩史, 矢崎成俊 (宮崎大学)
上山大信 (明治大学)

連絡先 : 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL : 0985-58-7381 / 0985-58-7288 (事務室) & FAX : 0985-58-7289

「微小重力環境でのすす燃焼のモデル支援解析」

三村昌泰（明治大学）

微小重力環境における燃焼は、重量下のそれとは違い、酸素を供給することによって持続する。スペースシャトル内でフィルター紙の燃焼において、酸素供給の速度に依存して予測出来ない不規則な燃焼が出現することが報告されている ([1], [2])。本講演では、その問題が動機になって、微小重力環境でのすす燃焼に現れるすす燃焼パターンをモデルの導出、シミュレーション、解析から得られた最近の結果を紹介する ([3] [6])。

参考論文：

- [1] S. L. Olson, H. R. Baum and T. Kashiwagi, Finger-like smoldering over thin cellulosic sheets in microgravity, The Combustion Institute, 2525-2533 (1998).
- [2] O. Zik and E. Moses, Fingering instability in combustion: An extended view, Phys. Rev. E, 60, 518-531 (1999).
- [3] K. Ikeda and M. Mimura: Mathematical treatment of a model for smoldering combustion Hiroshima Math. J., 38, 349-361 (2008)
- [4] A. Fasano, M. Mimura and M. Primicerio: Modelling a slow smoldering combustion process, Math. Meth. Appl. Sci., 33, 1211-1220 (2010)
- [5] K. Ikeda and M. Mimura: Traveling wave solutions of a 3-component reaction-diffusion model in smoldering combustion, manuscript
- [6] A. Fasano, H. Izuhara, M. Mimura and M. Primicerio: Traveling wave solutions in a simple reaction-diffusion model of smoldering combustion, manuscript

Marciniak によるヒドラ頭部再生モデルの単調定常解の集合の構造

中山 まどか (東北大学大学院理学研究科・D3)

ヒドラは、強い再生能力を持ち、頭部を切断しても数日で元通りに再生する。近年レセプター (受容体) と呼ばれる、細胞膜上に固定された、非拡散性物質の分布パターンを用いるのが生物学的により自然であると注目されている。レセプターは、そこに拡散性の伝達物質であるリガンドが結合すると、一連の反応を始めるスイッチのような役割を果たす。この考えに基づき、ヒドラの再生現象のモデルとして、Anna Marciniak-Czochra [1] は以下の 4 元連立微分方程式を提唱した:

$$\begin{cases} \frac{\partial r_f}{\partial t} = -\mu_f r_f - br_f l + dr_b + m_1, \\ \frac{\partial r_b}{\partial t} = -\mu_b r_b + br_f l - dr_b, \\ \frac{\partial l}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} - \mu_l l - br_f l + dr_b + p_l, \\ \frac{\partial p_l}{\partial t} = -\delta_l \frac{p_l}{1+p_l^2} + \frac{m_2 l r_b}{(1+\sigma_l p_l^2 - \beta_l p_l)(1+\alpha_l r_b)}. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $r_f(x, t) \geq 0$ はリガンドが結合していない受容体 (フリーレセプター) の点 x 時刻 t における濃度、 $r_b(x, t) \geq 0$ はリガンドが結合した受容体 (バウンダレセプター) の濃度、 $l(x, t) \geq 0$ はリガンドの濃度、 $p_l(x, t) \geq 0$ はフリーレセプターの生産率、また、 $\mu_f, \mu_b, \mu_l, m_1, m_2, b, d, \sigma_l, \beta_l, \delta_l$ は正定数である。なお、 p_l には斉次 Neumann 境界条件 $\partial p_l / \partial x = 0$ を課す。

本講演では、(1) の単調増加な定常解を構成する。この場合、 r_f と r_b の 2 変数を系から消去することができる。以下、空間変数 x は $0 \leq x \leq 1$ を動くとし、リガンドの濃度を u 、リガンドの生産率を v とすると、次の連立方程式が得られる:

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma} \frac{d^2 u}{dx^2} + f(u, v) = 0 & (0 < x < 1), \quad g(u, v) = 0 & (0 < x < 1), \\ \frac{du}{dx} = 0 & (x = 0, 1). \end{cases} \quad (2)$$

ただし、

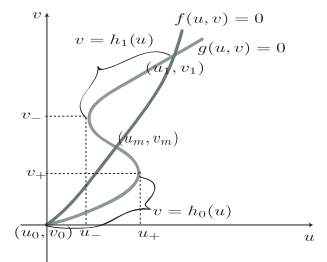
$$f(u, v) = v - \mu_l u - \frac{m_1 \mu_b b u}{M + \mu_b b u}, \quad g(u, v) = -\delta_l \frac{v}{1+v^2} + \frac{m_1 m_2 b u^2}{(M + \mu_b b u + \alpha_l m_1 b u)(1 + \sigma_l v^2 - \beta_l v)}.$$

非線型項が不連続であるため、 u, v は C^1 級とする。

パラメータに対する適当な条件の下で、 $f(u, v) = g(u, v) = 0$ は第 1 象限に丁度 3 個の解をもつ。それらを $(u_0, v_0), (u_m, v_m), (u_1, v_1)$ とする。ただし $0 = u_0 < u_m < u_1$ である。このとき、(1) は 3 つの定数定常解をもつことになる。2 曲線 $f(u, v) = 0$ と $g(u, v) = 0$ の交わり方は、 $f(u, v)$ に含まれる正のパラメーター μ_l に依存する。

正数 $\mu_* < \mu^*$ があって、 $\mu_* < \mu_l < \mu^*$ のとき交点は 3 個で、それ以外の範囲では、交点の数は 1 または 2 である。 u をある区間に制限すると $g(u, v) = 0$ は以下の 3 つの解を持つ (図 1 参照)

$$\begin{cases} v = h_0(u) & (u_0 < u < u_+, v_0 < v < v_+), \\ v = h_m(u) & (u_0 \leq u \leq u_+, v_+ \leq v \leq v_-), \\ v = h_1(u) & (u_0 < u < u_+, v_- < v < v_1). \end{cases} \quad (3)$$



そこで、解 $v = h_0(u), v = h_1(u)$ を選んで $f(u, v)$ に代入し、 $F_j(u) = f(u, h_j(u))$

図 1:

とすると ($j = 0, 1$), 微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} + \gamma F_0(u) = 0 & (0 < x < l), \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \gamma F_1(u) = 0 & (l < x < 1), \\ \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

が得られる. 問題 (4) については, 例えば, [2] の方法により, 任意に $\beta (u_0 < \beta < \min\{u_+, u_1\})$ を与えると $l \in (0, 1)$ 及び $\gamma_* = \gamma_*(\beta) > 0$ が定まり, $0 < \gamma < \gamma_*$ ならば, 区間 $(0, l)$ では $u'' + \gamma F_0(u) = 0$ をみたし, $(l, 1)$ では $u'' + \gamma F_1(u) = 0$ をみたし, かつ $u(l) = \beta$ となるような C^1 級の単調増加解が存在する. いま, $x = l + y/\sqrt{\gamma}$ と変数変換し, $u(x) = W(y)$ とおくと, W の定義域は, $-\sqrt{\gamma}l < y < \sqrt{\gamma}(1-l)$ となる. 問題 (4) は, 次と同値である:

$$\begin{cases} \frac{d^2 W}{dy^2} + F_0(W) = 0 & (-\sqrt{\gamma}l < y < 0), \quad \frac{d^2 W}{dy^2} + F_1(W) = 0 & (0 < y < \sqrt{\gamma}(1-l)), \\ \frac{dW}{dy}(-\sqrt{\gamma}l) = \frac{dW}{dy}(\sqrt{\gamma}(1-l)) = 0, \\ W(-\sqrt{\gamma}l) = k, \quad W(\sqrt{\gamma}(1-l)) = p & (u_0 < k < \beta < p < u_1), \\ W(0) = \beta, \quad W'(0) = m > 0 \\ W'(y) > 0 & (-\sqrt{\gamma}l < y < \sqrt{\gamma}(1-l)). \end{cases} \quad (5)$$

ここで, $\mathfrak{F}_0(W) = \int_{u_0}^W F_0(z)dz < 0$, $\mathfrak{F}_1(W) = \int_{u_1}^W F_1(z)dz > 0$ とする. さらに, $W \in C^1([-\sqrt{\gamma}l, \sqrt{\gamma}(1-l)]) \cap C^2([-\sqrt{\gamma}l, 0]) \cap C^2([0, \sqrt{\gamma}(1-l)])$ と仮定する. m は $0 < m < \sqrt{-\mathfrak{F}_0(\beta)}$ かつ $0 < m < \sqrt{-\mathfrak{F}_1(\beta)}$ を満たす. このとき, $\beta \in (u_-, \min\{u_+, u_1\})$, 初期値 p, k , 及び原点での解の傾き m は,

$$\mathfrak{F}_0(k) = \frac{1}{2}m^2 + \mathfrak{F}_0(\beta), \quad \mathfrak{F}_1(p) = \frac{1}{2}m^2 + \mathfrak{F}_1(\beta) \quad (6)$$

を満たす. また, $M = \sqrt{\gamma}l, N = \sqrt{\gamma}(1-l)$ とおくと,

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \int_k^\beta \frac{dw}{\sqrt{\mathfrak{F}_0(k) - \mathfrak{F}_0(w)}} = -M, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\beta^p \frac{dw}{\sqrt{\mathfrak{F}_1(p) - \mathfrak{F}_1(w)}} = N$$

である.

定理 1. $\mu_* < \mu < \mu^*$, $u_- < \beta < \min\{u_+, u_1\}$ のとき, すべての $\gamma > 0$ に対して, (5) は単調増加な解をもつ. さらに, ある区間 $[\bar{\mu}_*, \bar{\mu}^*] \subset (\mu_*, \mu^*)$ が存在して, 十分大きい γ に対する l の挙動は, 次の 3 つに分類される.

- (i) $\mu_l \in (\mu_*, \bar{\mu}_*)$ のとき, すべての $\beta \in (u_-, \min\{u_+, u_1\})$ に対して, $\gamma \rightarrow +\infty$ のとき, $l \rightarrow 1$.
- (ii) $\mu_l \in (\bar{\mu}_*, \bar{\mu}^*)$ のとき, ある $\beta^*(\mu_l) \in (u_-, \min\{u_+, u_1\})$ が存在し,
 - (a) $u_- < \beta < \beta^*(\mu_l)$ ならば, $\gamma \rightarrow +\infty$ のとき, $l \rightarrow 1$,
 - (b) $\beta = \beta^*(\mu_l)$ に対し, $\gamma \rightarrow +\infty$ のとき, $l \rightarrow \frac{\sqrt{|F'_1(u_1)|}}{\sqrt{|F'_0(u_0)|} + \sqrt{|F'_1(u_1)|}}$,
 - (c) $\beta^*(\mu_l) < \beta < \min\{u_+, u_1\}$ ならば, $\gamma \rightarrow +\infty$ のとき, $l \rightarrow 0$.
- (iii) $\mu_l \in [\bar{\mu}^*, \mu^*)$ のとき, すべての $\beta \in (u_-, \min\{u_+, u_1\})$ に対し, $\gamma \rightarrow +\infty$ のとき, $l \rightarrow 0$.

参考文献

- [1] Marciniak-Czochra, A., *Receptor-based models with hysteresis for pattern formation in hydra*, Math. Biosci. **199** (2006), 97–119.
- [2] Mimura, M., Tabata, M., Hosono, Y., *Multiple solutions of two-point boundary value problems of Neumann type with a small parameter*, SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), 613–631.

「1次元非線形格子における Discrete Breather の存在と安定性」

吉村 和之 (NTT コミュニケーション科学基礎研究所)

非線形格子系において、Discrete Breather と呼ばれる空間的に局在した周期振動が出現し得ることが知られている。講演の前半部では、Discrete Breather について概説し、関連する既存研究を幾つか紹介する。後半部では、1次元非線形格子系（2原子 Fermi-Pasta-Ulam 格子）について、Discrete Breather を表す種々の周期解の存在証明と、それらの線形安定性に関する結果を述べる。

メトロノームの同期現象+

宮崎大学 工学部 情報システム工学科 伊達 章

神経の興奮、心臓の鼓動など、自然現象、とくに生体にはリズムが自発的に揃う「引き込み」と呼ばれる現象がある。このような自然発生する「リズム」とその同期は、生活の中にある身近な材料を用いて確認できる¹⁻³。会場では、メトロノームの同期現象を紹介したい。もちろん、実際に触って実験できる環境も提供したい。数万円程度の予算で、手間もかからずインパクトのある実験ができる。しかも、奥が深そう。比較的単純な数式だけで、直観的な理解ができる点もよい。科学教材としては最高の部類に属すると思う。

ところで、脳の情報処理は面白い。私は、その数理モデル化にもっとも魅力を感じている。時間があれば、同期現象と脳の数理モデルに関係する話もしたい。

- 自然界
 - ・サーカディアンリズム
 - ・心臓の拍動
 - ・蛍の同期
 - ・歩行
 - ・...
- ペットボトル振動子の同期現象
- 特徴（振り子とは違う）
 - ・安定なリズム（外乱に影響されない）
 - ・状態の不連続な変化
 - ・同期現象
- メトロノームの同期現象



リズム現象の数理：蔵本モデル

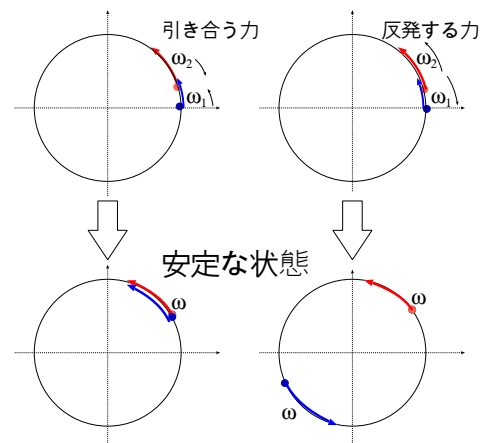
$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 - 0.5(\sin(\phi_1 - \phi_2))$$
$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega_2 - 0.5(\sin(\phi_2 - \phi_1))$$

$\phi_1 = \phi_1(t) \cdots$ 振動子 1 の位相

$\phi_2 = \phi_2(t) \cdots$ 振動子 2 の位相

$\omega_1 \cdots$ 振動子 1 の自然周波数（例えば 1.0）

$\omega_2 \cdots$ 振動子 2 の自然周波数（例えば 1.6）



「相互作用する二つの振動子間の問題は、円周上を回転運動しながら相互作用する 2 個の粒子の問題に似ている。二つの振動子が同一の場合には、相互作用が引力なら両者の位相は最終的に一致し、斥力なら 180° の位相差を保って安定化する。」（文献 [1] p.135 より）

参考文献

1. 蔵本由紀：非線形科学，集英社新書，2007.
2. 蔵本由紀（編）：リズム現象の世界，東京大学出版会，2005.
3. 岡村実奈，吉川研一：台所で遊ぶ結合振動子の実験，数理科学，1997 年 6 月号，pp.7-13.

「絶対温度が負となる点渦系に関する力学的考察 ～専用計算機を用いたダイレクトシミュレーション結果、および解析的 結果～」

静岡大学教育学部 八柳祐一

共同研究者：神奈川大理 羽鳥尹承，京大人環 際本泰士

本研究の原点は、「インバースカスケードと絶対温度が負という状態は関係があるのか？」という疑問である。

Onsager は 1949 年、木星の大赤斑など、大規模な渦構造が形成される理由として「絶対温度が負」というアイデアを提示し、実際に 2 次元点渦系において絶対温度が負となり得ることを予言した [1]。そこで、この予言について検討を行うべく、分子動力学専用計算機をビオサバール積分の高速積分機として利用した数値計算プラットフォームを開発し、1) ランダムサンプリングによって得られた 2 次元点渦系の状態密度関数は、確かに絶対温度が負となる状態があり得ることを示す形となること 2) 正負同数の点渦からなる系において、エネルギーが高い側ではダイポール状の分布、エネルギーが低い側では一様分布が平衡分布となることを示した。講演では、まずこの結果についての紹介を行う。

上記のシミュレーション研究を行っている途中、粒子数が 2 桁違う系のシミュレーション結果を比較していて、時間発展の様子が途中、かなり違ったものになっていることに気がついた。「数値粘性」で片付けられるような気もしたが、点渦系は、やはり点の集合体であり、プラズマのように粒子同士による衝突効果のようなものが入ると考える方が自然なのではないか、と感じた。もちろん、点渦は非粘性の 2 次元オイラー方程式の厳密解である。しかし、これは点渦というミクロなものに対する方程式と考えるべきであり、粗視化によりマクロな系で成り立つマクロな方程式に直すと、右辺に衝突に由来する粘性項が現れることを解析的に導くことに成功した。講演の後半では、この解析的結果についての紹介を行う予定である。

[1] L. Onsager, Nuovo Cimento Suppl., 6 (1949) 279.

多重連結領域における定常 Navier-Stokes 方程式の境界値問題

奈良女子大学理学部 柳沢 卓

本講演では、境界流束 (boundary flux) があらかじめ与えられている場合の定常 Navier-Stokes 方程式に対する境界値問題を、多重連結領域 Ω 上で論ずる。特に、領域 Ω の位相的あるいは幾何学的性質と上記境界値問題の解の存在定理との関係に係る幾つかの結果を紹介することを目的とする。講演内容は、全て東北大学の小藺英雄氏との共同研究に基づく。

A mathematical analysis of tsunami generation in shallow water due to seabed deformation

井口 達雄

慶應義塾大学 理工学部 数理科学科

In numerical computations of tsunamis due to submarine earthquakes, it is frequently assumed that the initial displacement of the water surface is equal to the permanent shift of the seabed and that the initial velocity field is equal to zero, and the shallow water equations are often used to simulate the propagation of tsunamis. In this talk we give a mathematically rigorous justification of this tsunami model starting from the full water wave problem by comparing the solution of the full problem and that of the tsunami model. We also show that in some case we have to impose a nonzero initial velocity field, which arises as a nonlinear effect.

We will consider a water wave in $(n+1)$ -dimensional space and assume that the water surface $\Gamma(t)$ and the seabed $\Sigma(t)$ at time t are of the forms

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= \{X = (x, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}; x_{n+1} = h + \eta(x, t)\}, \\ \Sigma(t) &= \{X = (x, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}; x_{n+1} = b(x, t)\},\end{aligned}$$

where h is the mean depth of the fluid. The functions b and η represent the bottom topography and the surface elevation, respectively. In this problem b is a given function, while η is the unknown. We assume that the seabed deforms only for the time interval $[0, t_0]$, so that the function b can be written in the form $b(x, t) = \beta(x, t/t_0)$, where

$$\beta(x, \tau) = \begin{cases} b_0(x) & \text{for } \tau \leq 0, \\ b_1(x) & \text{for } \tau \geq 1. \end{cases}$$

We assume that the water is incompressible and inviscid fluid, and that the flow is irrotational. Then, the fluid motion is described by the velocity potential $\Phi = \Phi(X, t)$. We introduce a new unknown function ϕ by $\phi(x, t) := \Phi(x, h + \eta(x, t), t)$, which is the trace of the velocity potential on the water surface. Rewriting the equations in a nondimensional form, we see that η and ϕ satisfy

$$(1) \quad \begin{cases} \phi_t + \eta + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{2}\delta^2(1 + \delta^2|\nabla\eta|^2)^{-1}(\Lambda^{\text{DN}}\phi + \varepsilon^{-1}\Lambda^{\text{NN}}\beta_\tau + \nabla\eta \cdot \nabla\phi)^2 = 0, \\ \eta_t - \Lambda^{\text{DN}}\phi - \varepsilon^{-1}\Lambda^{\text{NN}}\beta_\tau = 0 & \text{for } t > 0, \end{cases}$$

where δ and ε are nondimensional parameters, $b(x, t) = \beta(x, t/\varepsilon)$, $\Lambda^{\text{DN}} = \Lambda^{\text{DN}}(\eta, b, \delta)$ and $\Lambda^{\text{NN}} = \Lambda^{\text{NN}}(\eta, b, \delta)$ are linear operators depending on η , b , and δ . More precisely, the operators are defined in the following way.

Definition 1 Under appropriate assumptions on η and b , for any function φ on the water surface in some class there exists a unique solution Φ of the boundary value problem

$$\begin{cases} \Delta\Phi + \delta^{-2}\partial_{n+1}^2\Phi = 0 & \text{in } b(x) < x_{n+1} < 1 + \eta(x), \\ \Phi = \varphi & \text{on } x_{n+1} = 1 + \eta(x), \\ \delta^{-2}\partial_{n+1}\Phi - \nabla b \cdot \nabla\Phi = \gamma & \text{on } x_{n+1} = b(x). \end{cases}$$

Using the solution Φ we define linear operators $\Lambda^{\text{DN}} = \Lambda^{\text{DN}}(\eta, b, \delta)$ and $\Lambda^{\text{NN}} = \Lambda^{\text{NN}}(\eta, b, \delta)$ by

$$\Lambda^{\text{DN}}(\eta, b, \delta)\varphi + \Lambda^{\text{NN}}(\eta, b, \delta)\gamma = (\delta^{-2}\partial_{n+1}\Phi - \nabla\eta \cdot \nabla\Phi)|_{x_{n+1}=1+\eta(x)}.$$

We will consider the initial value problem for (1) with the initial conditions

$$(2) \quad \eta = \eta_0, \quad \phi = \phi_0 \quad \text{at} \quad t = 0.$$

In this talk, the two parameters

$$\delta = \frac{\text{mean depth}}{\text{wave length}}, \quad \varepsilon = \frac{\text{time of seabed deformation}}{\text{time period of tsunami}}$$

play an important role. We will consider the limit $\delta, \varepsilon \rightarrow 0$ under the restriction $\delta^2/\varepsilon \rightarrow \sigma$ with some nonnegative constant σ . It is known that the well-posedness of the initial value problem for water waves may be broken unless a generalized Rayleigh–Taylor sign condition $-\partial p/\partial N \geq c_0 > 0$ on $\Gamma(t)$ is satisfied, where p is the pressure and N is the unit outward normal. To ensure this sign condition we impose the following conditions on the seabed.

Assumption 1 There exist constants $C, c > 0$ such that for any $(x, \tau) \in \mathbf{R}^n \times (0, 1)$ the following conditions are satisfied.

- (i) In the case $\delta/\varepsilon \rightarrow 0$: No conditions.
- (ii) In the case $\delta/\varepsilon \rightarrow \nu$: $1 + \nu^2 \beta_{\tau\tau}(x, \tau) \geq c$.
- (iii) In the case $\delta/\varepsilon \rightarrow \infty$ and $\delta^2/\varepsilon \rightarrow 0$: $\beta_{\tau\tau}(x, \tau) \geq 0$.
- (iv) In the case $\delta/\varepsilon \rightarrow \infty$ and $\delta^2/\varepsilon \rightarrow \sigma$: $\beta_{\tau\tau}(x, \tau) \geq 0$ and $1 + \sigma(a^{(0)} + \sigma C \beta_{\tau\tau})(x, \tau) \geq c$.

From a technical point of view, we also impose the following conditions.

Assumption 2 For any $(x, \tau) \in \mathbf{R}^n \times (0, 1)$ the following conditions are satisfied.

- (i) In the case $\delta/\varepsilon \rightarrow \nu$: No conditions.
- (ii) In the case $\delta/\varepsilon \rightarrow \infty$: $\beta_{\tau\tau\tau}(x, \tau) \leq 0$.

Our main result in this talk is the following.

Theorem 1 Let $c_0 > 0$, $\sigma \geq 0$, and $s > (n + 7)/2$. In addition to Assumptions 1 and 2, we assume that

$$\begin{cases} \eta_0 \in H^{s+5}, \quad \nabla \phi_0 \in H^{s+4}, \quad \beta \in C(\mathbf{R}; H^{s+5+1/2}) \cap B^3((0, 1); H^{s+6}), \\ 1 + \eta_0(x) - b_0(x) \geq c_0 > 0 \quad \text{for } x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

Then, there exist a time $T > 0$ and constants $C_0, \delta_0, \varepsilon_0, \gamma_0 > 0$ such that for any $\delta \in (0, \delta_0]$ and $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ satisfying $|\delta^2/\varepsilon - \sigma| \leq \gamma_0$ the initial value problem (1) and (2) has a unique solution $(\eta, \phi) = (\eta^{\delta, \varepsilon}, \phi^{\delta, \varepsilon})$ on the time interval $[0, T]$ satisfying

$$\sup_{\varepsilon \leq t \leq T} (\|\eta^{\delta, \varepsilon}(t) - \eta^0(t)\|_s + \|\nabla \phi^{\delta, \varepsilon}(t) - u^0(t)\|_s) \leq C_0(\varepsilon + |\delta^2/\varepsilon - \sigma|),$$

where (η^0, u^0) is a unique solution of the shallow water equations

$$\begin{cases} \eta_t^0 + \nabla \cdot ((1 + \eta^0 - b_1)u^0) = 0, \\ u_t^0 + (u^0 \cdot \nabla)u^0 + \nabla \eta^0 = 0 \quad \text{for } 0 < t < T \end{cases}$$

with the initial conditions

$$\begin{cases} \eta^0 = \eta_0 + (b_1 - b_0), \\ u^0 = \nabla \left(\phi_0 + \frac{\sigma}{2} \int_0^1 \beta_\tau(\cdot, \tau)^2 d\tau \right) \quad \text{at } t = 0. \end{cases}$$