

研究集会
「偏微分方程式と現象：
PDEs and Phenomena in Miyazaki 2011」

日時：2011 年 11 月 18 日（金）～ 11 月 19 日（土）

会場：宮崎大学工学部 B 棟 2 階 B209 教室

案内：<http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/ppm/>

アブストラクト

研究集会 「偏微分方程式と現象：

PDEs and Phenomena in Miyazaki 2011 (略称：PPM2011)」

日時： 2011 年 11 月 18 日（金）～ 11 月 19 日（土）

会場： 宮崎大学工学部 B 棟 2 階 B209 教室

案内： <http://www.cc.miyazaki-u.ac.jp/math/ppm/ppm2011/>

プログラム

11 月 18 日（金）

午後の部

14:00-14:55 菅徹（東北大学）

「円環領域における Liouville-Gel'fand 方程式の解の分岐構造」

15:15-16:10 赤堀公史（静岡大学）

「エネルギー臨界冪を持つ非線形シュレディンガー方程式に対する
基底状態の存在性と散乱・爆発問題」

16:30-17:25 俣野博（東京大学）

「3 次元細胞電気生理学モデルの時間大域解」

11 月 19 日（土）

午前の部 << PPM2011 特別実験講座 >>

10:15-12:15 山崎義弘（早稲田大学）

「粘着テープをはがすということ－界面運動と非線形ダイナミクス－」

注 宮交バス「橘通り 3 丁目→宮崎大学（木花キャンパス）」の土曜日の朝の時刻表：

8:21 → 8:54 , 8:41 → 9:18 , 9:11 → 9:52 , 9:21 → 9:54 , 9:41 → 10:18（遅刻！）

午後の部

14:00-14:55 奥田孝志（気象大学校）

「3重臨界点を持つ反応拡散系に現れる振動パターン」

15:15-16:10 大枝和浩（早稲田大学）

「被食者のための protection zone が存在する被食者-捕食者モデルについて」

16:30-17:25 太田隆夫（京都大学）

「興奮性反応拡散系における局在ドメインのさまざまな自己推進運動」

本研究集会は、以下の科学研究費補助金（基盤 C：北，大塚，矢崎）

課題番号	研究代表者	課題名
20540181	北 直泰	非線形シュレディンガー方程式の特異性解析
22540231	大塚浩史	平衡点渦系の平均場と点渦系の関連の探求
23540150	矢崎成俊	移動境界問題の統一的な数値解法の確立

および平成 23 年度宮崎大学工学部長裁量経費

所管コード	申請代表者	プロジェクト名
13010302	飯田雅人	偏微分方程式と現象に関する研究集会， 及び応用物理学特別講義への最先端トピックスの提供

の援助を受けています。

世話人： 辻川 亨，飯田雅人，北 直泰，大塚浩史，矢崎成俊（宮崎大学）

連絡先： 辻川 亨 (Tohru Tsujikawa)

〒 889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1 宮崎大学工学部材料物理工学科

E-mail：tujukawa@cc.miyazaki-u.ac.jp

TEL：0985-58-7381 / 0985-58-7288（事務室）& FAX：0985-58-7289

円環領域における Liouville-Gel'fand 方程式の 解の分岐構造

菅 徹

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻

本講演では Liouville 方程式もしくは Gel'fand 方程式と呼ばれる以下の半線形楕円型方程式を考察する:

$$(LG) \begin{cases} -\Delta u = \lambda e^u & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

ここで λ は正の (分岐) パラメータであり, Ω_ε は $\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2; \varepsilon < |x| < 1\}$$

で定義される 2 次元の円環領域である. またこれに関連した以下の平均場方程式に関しても考察する:

$$(MF) \begin{cases} -\Delta u = \rho \frac{e^u}{\int_\Omega e^u dx} & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

これら二つの方程式はパラメータの取り換え $\rho = \lambda \int_\Omega e^u dx$ によって解の対応が付く.

(LG) の球対称解の分岐構造に関しては, Nagasaki-Suzuki [3] と Lin [2] が独立に次のようなことを示している. (LG) の球対称解は分岐図上 (λ - u 平面上) で枝を成し, その枝は $(\lambda, u) = (0, 0)$ から出発して λ の大きい方へ伸び, その後一度だけ折り返して λ の小さい方へ伸び, $\lambda \downarrow 0$ のとき解 u が各点で正の無限大に発散 (爆発) する (図 1 参照). この枝は (MF) においては $(\rho, u) = (0, 0)$ から $\rho > 0$ の方向へ伸びる枝に対応する (図 2 参照). また Lin はさらに, この球対称な解の枝上に無限個の分岐点があり, そこから非球対称な解が現れるということを示した. その後 Dancer [1] によって Lin が得た球対称解は分岐図上非有界に伸びるということが示されている. 一方 Nagasaki-Suzuki も $\int_\Omega e^u dx$ が大きいような非球対称解を得ており, これは $\lambda \ll 1$ のときの解に対応していると思われる. これらをまとめると (LG) 及び (MF) の分岐構造は図 1-2 のようになる. 本研究の目標は ε が小さい場合に, 球対称解から分岐してきた非球対称解の大域的な分岐構造を決定することである. そのために, (LG) の $\varepsilon \rightarrow 0$ における極限の方程式を考察する. 形式的な計算を行うと, 次の極限方程式を得ることができる:

$$(LE) \begin{cases} -\Delta u = A e^u & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ u(x) = (B - 2) \log |x| + o(1) & \text{as } |x| \rightarrow 0, \\ u(x) = -(B + 2) \log |x| + o(1) & \text{as } |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

ここで $A > 0$ と $B \geq 2$ はパラメータである.

直接的な計算によって、以下の関数が (LE) の解であることが確かめられる。

$$U = U_K(x) = \log \frac{1}{r^2(r^K + r^{-K})^2}, \quad A = 8K\pi, B = 2K, \quad (K \geq 1),$$

$$V = V_{k,a,\gamma}(x) = \log \frac{1}{r^2\{r^k + r^{-k} - 2(1-a)^{1/2} \cos(k\theta + \gamma)\}^2},$$

$$A = 8k\pi, B = 2k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 0 < a < 1, \gamma \in \mathbb{R}).$$

ただし $x = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ である。これらの解を用いて (LG) 及び (MF) の解を構成できると考えているが、現時点では形式的議論による近似解のみしか構成されていない。

主結果 1. 各 $k = 2, 3, \dots, 0 < a < 1, \gamma \in \mathbb{R}$ に対して、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき次の漸近系を持つ (LG) 及び (MF) の形式的な解 $(\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon)$ 及び $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ が構成できる。

$$\lambda_\varepsilon = 8k^2 \varepsilon^{k-1} \left(1 + O \left(\varepsilon^{k-1} \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \right),$$

$$\rho_\varepsilon = 8k\pi + O(\varepsilon^{k-1}),$$

$$u_\varepsilon(x) = \left(k - \frac{1}{k} \right) \log \frac{1}{\varepsilon} + V(\varepsilon^{\frac{k-1}{2k}} x) + O(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}) \quad \text{in } L^\infty(\Omega_\varepsilon).$$

本講演ではどのようにしてこのような近似解が得られるかを述べたい。

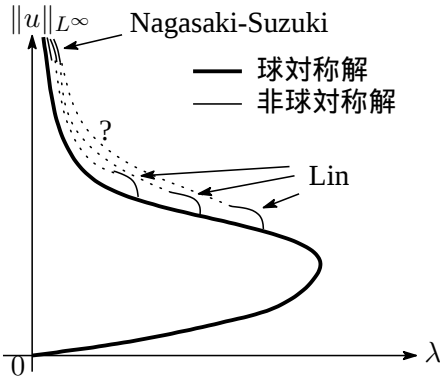


図 1 : (LGE) の分岐図

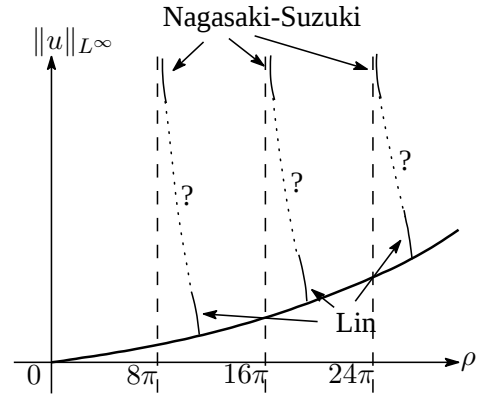


図 2 : (MF) の分岐図

References

- [1] E.N. Dancer, *Global breaking of symmetry of positive solutions on two-dimensional annuli*, Differential Integral Equations 5 (1992), 903–913.
- [2] S.-S. Lin, *On non-radially symmetric bifurcation in the annulus*, J. Differential Equations **80** (1989), 251–279.
- [3] K. Nagasaki and T. Suzuki, *Radial and nonradial solutions for the nonlinear eigenvalue problem $\Delta u + \lambda e^u = 0$ on annuli in $\mathbb{R}^2$* , J. Differential Equations **87** (1990), 144–168.

Existence of a ground state, scattering and blow-up for a nonlinear Schrödinger equation with critical growth

赤堀公史 (静岡大学工学部)

共同研究者: Slim Ibrahim(University of Victoria), 菊池弘明 (東京電機大), 名和範人 (大阪大)

次の非線形 Schrödinger 方程式を考える:

$$2i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + \mu|\psi|^{p-1}\psi + |\psi|^{\frac{4}{d-2}}\psi = 0. \quad (\text{NLS})$$

ここで, $\psi = \psi(x, t)$ は $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ ($d \geq 3$) 上の複素数値未知関数, Δ は $\mathbb{R}^d$ 上の Laplace 作用素, $\mu \in \mathbb{R}$, $1 + \frac{4}{d} < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ である.

方程式 (NLS) は, 次のエネルギー-臨界非線形 Schrödinger 方程式にエネルギー-劣臨界な摂動 $\mu|\psi|^{p-1}\psi$ を加えた方程式と見なせる:

$$2i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + |\psi|^{\frac{4}{d-2}}\psi = 0. \quad (\text{NLS}_0)$$

方程式 (NLS₀) は, 定常解

$$Q_0(x) := \left(\frac{\sqrt{d(d-2)}}{1+|x|^2} \right)^{\frac{d-2}{d}} \quad (x \in \mathbb{R}^d) \quad (1)$$

を持つ. さらに, Kenig-Merle[3] によって, 定常解 Q_0 よりも低いエネルギーの初期値から出発した解の挙動が調べられた.

我々の第一の目的は, 摂道の影響によって, 方程式 (NLS) が振動する定在波 $e^{\frac{i}{2}\omega t}Q(x)$ ($\omega > 0$) を持つか否かを明らかにする事である. 振動数 ω を持つ定在波 $e^{\frac{i}{2}\omega t}Q(x)$ の存在は, 定常問題

$$\omega Q - \Delta Q - \mu|Q|^p Q - |Q|^{\frac{4}{d-2}}Q = 0 \quad (\text{SP})$$

の解の存在と同値であるため, この方程式の解の存在・非存在を示す事が目標である¹. 特に, 基底状態の存在に興味がある; 基底状態とは, 方程式 (SP) の非自明解の中で, 作用が最小な解を意味する. ここで, 作用とは

$$\mathcal{S}_\omega(Q) := \omega \int_{\mathbb{R}^d} |Q|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla Q|^2 - \mu \frac{2}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |Q|^{p+1} - \frac{d-2}{d} \int_{\mathbb{R}^d} |Q|^{\frac{2d}{d-2}} \quad (2)$$

である.

¹摂道のない場合 ($\mu = 0$) は, 非自明解は存在しない.

我々の第二の目的は、基底状態が存在する時、その作用より小さい作用を持つ初期値から出発した解の挙動を明らかにする事である。

我々の結果を紹介するため、記号を導入する：

$$m_\omega := \inf \{ \mathcal{S}_\omega(u) \mid u \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}, \mathcal{K}(u) = 0 \}. \quad (3)$$

ここで、

$$\mathcal{K}(u) := 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 - \mu \frac{d(p-1)}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p+1} - 2 \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{2d}{d-2}} \quad (4)$$

である。²

我々の第一の結果は次である [1]：

Theorem 1. $\omega > 0$ とする。

$d \geq 4$ ならば、任意の $\mu > 0$ に対し、方程式 (SP) の基底状態 Q_ω で、 $\mathcal{S}_\omega(Q_\omega) = m_\omega$ となるものが存在する。

一方、 $d = 3$ で、 $\mu > 0$ が十分小さい時は、方程式 (SP) の基底状態は存在しない。

さて、Theorem 1 で見つけた基底状態 Q_ω に対し、それよりも作用の小さい状態全体を考える：

$$A_\omega := \{ u \in H^1(\mathbb{R}^d) \mid \mathcal{S}_\omega(u) < \mathcal{S}_\omega(Q_\omega) \}. \quad (5)$$

さらに、

$$A_{\omega,+} := \{ u \in A_\omega \mid \mathcal{K}(u) > 0 \}, \quad A_{\omega,-} := \{ u \in A_\omega \mid \mathcal{K}(u) < 0 \} \quad (6)$$

とする。この時、 $A_\omega = A_{\omega,+} \cup A_{\omega,-} \cup \{0\}$ が分かる。さらに、次の結果が得られた [1, 2]：

Theorem 2. $\mu > 0, \omega > 0$ とする。この時、次が成立する：

- (i) $d \geq 5$ とする。 $A_{\omega,+}$ に属する初期値から出発した解は、時間大域的に存在し、時間無限大 ($t \rightarrow \pm\infty$) において、漸近的に自由解のように振舞う。
- (ii) $d \geq 4$ とする。 $A_{\omega,-}$ に属する球対称な初期値から出発した解は、時間大域的に存在しない。

Theorem 2 より、 $Q_\omega \in \overline{A_{\omega,+}} \cap \overline{A_{\omega,-}}$ であるから、 Q_ω は不安定である事が分かる。

Theorem 1 と Theorem 2 の結果は、 $\mu_1 |\psi|^{p_1-1} \psi + \dots + \mu_k |\psi|^{p_k-1} \psi$ ($k \in \mathbb{N}, \mu_1, \dots, \mu_k > 0, 1 + \frac{4}{d} < p_1, \dots, p_k < 1 + \frac{4}{d-2}$) を含むような、より一般的な摂道に対しても示す事ができる ([2] 参照)。

References

- [1] Akahori, T., Ibrahim, S., Kikuchi, H. and Nawa, H., Existence of a ground state and blow-up problem for a nonlinear Schrödinger equation with critical growth. to appear.
- [2] Akahori, T., Ibrahim, S., Kikuchi, H. and Nawa, H., Existence of a ground state and scattering for a nonlinear Schrödinger equation with critical growth. Preprint.
- [3] Kenig, C.E. and Merle, F., Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case. Invent. Math. **166** (2006), 645–675.

²方程式 (SP) の解 Q は、 $\mathcal{K}(Q) = 0$ を満たす事が分かる。

「3次元細胞電気生理学モデルの時間大域解」

俣野博（東京大学）

神経パルスの伝播は、膜電位（すなわち細胞膜内外の電位差）の変化が空間的に伝わる現象である。この現象を記述する古典的モデルである Hodgkin-Huxley 方程式や、その簡易版の FitzHugh-Nagumo 方程式は、いずれも細長い神経細胞（ニューロン）を1次元媒体で近似したものにすぎない。これに対し、細胞の3次元構造を考慮すると、方程式は細胞の境界面（すなわち細胞膜）上で定義された擬微分方程式になる。しかしこれまで、3次元モデルの数学的研究は、ほとんど進んでいなかった。というのも、この方程式においては、ラプラシアンを用いる古典的モデルと違って主要部に現れる擬微分作用素が一般に正值性を有しない（言い換えれば、最大値原理を満たさない）ため、解の一意有界性を示すことが困難であり、これが詳しい解析を阻んできた主要因であった。

最近、ミネソタ大学の森洋一朗氏と共同でこの3次元モデルを研究し、「作用素の擬正值性」という新しい概念を導入することにより、上述の困難を克服することができた。具体的には、細胞が有限の大きさを持つ場合には解が一意有界であること、したがって時間大域的な古典解が存在することを証明した。本講演では、この結果を紹介するとともに、この方程式の大域アトラクターの性質について論じる。

粘着テープをはがすということ ー界面運動と非線形ダイナミクスー

早稲田大学 山崎義弘 (yoshy@waseda.jp)

日常生活において私たちは、いたるところで粘着テープの恩恵を受けている。粘着テープは粘着剤とフィルムからなる複合系であり、用途は工業用、一般用、医療用など多岐にわたっている。テープをくっつけてはがすということは簡単なようにも思えるが、一般的に良い粘着テープは「はがれにくく、はがしやすい」ものであり、この一見すると矛盾した要求を満たす粘着テープを作成するのは難しい課題である。

ここで、平らな板に貼られた粘着テープをはがす状況を考えよう。これは、フィルムと板の間隔をひろげる動作であり、間隔がひろがると粘着剤内部の圧力が下がり、粘着剤に空気が押し込まれるように、空気と粘着剤の界面が移動する(図1)。このような状況では一般に、粘性突起現象(viscous fingering)が観察される。これは、空気のような低粘性流体が粘着剤やオイルなどの高粘性流体に押し込まれるときに生じる界面の運動で、図2のような装置を作成し、2枚の板に挟まれた流体に空気を吹き込むと、空気の領域が図3のようにひろがる様子が観察できる。

粘着テープをはがすとき、引き伸ばされ変形した粘着剤が糸引き(フィブリル)やトンネルなどの特徴的な形をつくることにより粘着力を高めることができる(図4)。このような特徴的な形態が安定に形成されるかどうかは、はがす速さに依存しており、粘着剤の変形状態が双安定となる場合もある。双安定となる場合、一定の速さでテープをはがしていても、はがすのに必要な力が周期的に変動したり(それに伴い、ビリビリと音を立てたり)、変形した粘着剤による様々なパターンが、はがした後のテープに現れたりする(図5)。

PPM2011において、演示実験では、実際にいくつかの粘着テープをはがして、はがす速さと力の関係を体感し、また、viscous fingeringの実験を行いたい。講演では、viscous fingeringにまつわるダイナミクスの普遍的枠組み、および、粘着テープをはがすということから抽出できる、双安定系の非線形ダイナミクスについて紹介する予定である。

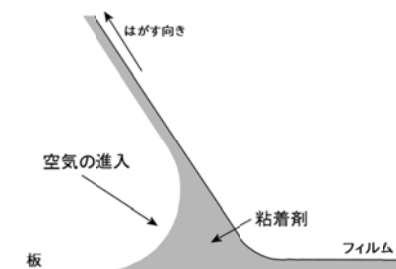


図 1

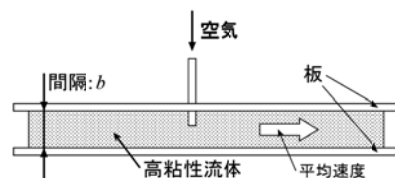


図 2

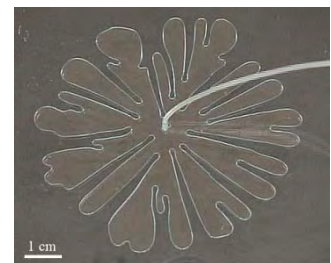


図 3

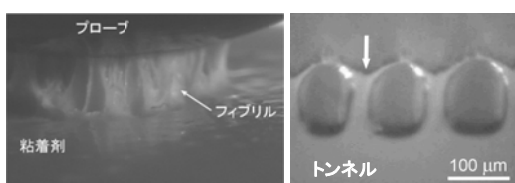


図 4

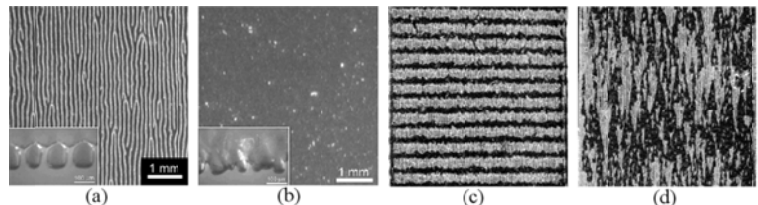


図 5

[参考文献]

- [1] The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid, P. G. Saffman and G. I. Taylor, Proc. R. Soc. London Ser.A, 245, pp.312-329 (1958)
- [2] 粘着テープの剥離過程で形成される時空パターン, 山崎義弘・戸田昭彦, 日本物理学会誌 59 (2004) 39-43
- [3] Pattern Formation and Dynamics of Deformed Adhesive in Peeling, Y. Yamazaki, A. Toda, Physica D 214 (2006) 120-131
- [4] 粘着剤のフラクトグラフィ, 山崎義弘, 高分子 vol.59 No.12 (2010) 905-908
- [5] Collective behavior of bistable units with global and asymmetric local interactions, Y. Yamazaki, Prog. Theor. Phys. 125 (2011) 641-652

「3重臨界点を持つ反応拡散系に現れる振動パターン」

奥田孝志（気象大学校）

2変数活性因子 - 抑制因子系に対して、活性因子にフィードバック効果をもつ第3の変数を導入した3変数反応拡散系を考える。この反応拡散系の shadow システムにおいて3重臨界点が現れるが、その臨界点周りにおける分岐構造について議論したい。特に、1モード定常解からのホップ分岐、および数値計算によって観測されるカオス的振動について紹介する。また、偏微分方程式に現れる振動パターンについて、数値計算による結果も紹介する。本研究は小川知之教授（明治大学先端数理科学研究科）との共同研究である。

被食者のための protection zone が存在する被食者-捕食者モデルについて

大枝 和浩 (早稲田大学基幹理工学部)

次の非線形楕円型方程式系の境界値問題について考える:

$$(SP) \begin{cases} \Delta[(1 + k\rho(x)v)u] + u(\lambda - u - b(x)v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta v + v(\mu + cu - v) = 0 & \text{in } \Omega \setminus \overline{\Omega}_0, \\ \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \partial_n v = 0 & \text{on } \partial(\Omega \setminus \overline{\Omega}_0). \end{cases}$$

ここで, Ω, Ω_0 はそれぞれ滑らかな境界 $\partial\Omega, \partial\Omega_0$ を有する $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ の有界領域であり, $N \geq 2$ のときは $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ を仮定し, $N = 1$, すなわち, $\Omega = (a_1, a_2)$, $a_1 < a_2$ のときは, ある $a \in (a_1, a_2)$ に対して $\Omega_0 = (a_1, a)$ または $\Omega_0 = (a, a_2)$ であるとする. また, $k \geq 0, \lambda > 0, c > 0, \mu \in \mathbb{R}$ は全て定数であり, $\partial_n = \partial/\partial n$ は法線微分を表す. さらに, β を正定数として, $\rho(x) = b(x)/\beta = 1$ in $\Omega \setminus \Omega_0$, $\rho(x) = b(x) = 0$ in Ω_0 を仮定する.

問題 (SP) は, 領域 Ω 内に棲息する被食者の個体数密度 u と $\Omega \setminus \Omega_0$ 内に棲息する捕食者の個体数密度 v の時間変化を記述する反応拡散系の定常問題であり, λ, μ はそれぞれ被食者, 捕食者の増殖率 (正確には内的自然増殖率) を表し, 斉次 Neumann 境界条件は境界で生物の出入りが無いことを意味する.

(SP) の特徴の一つは拡散項の部分に非線形拡散項 $k\Delta[\rho(x)vu]$ を含んでいることである. 非線形拡散項 $k\Delta[\rho(x)vu]$ は, 捕食者の個体数密度が高い場所ほど被食者の拡散が促進される状況を表しており, k の値が大きいほど被食者が捕食者の多い場所を避ける傾向が大きくなる. このような非線形拡散は交差拡散 (cross-diffusion) と呼ばれ, 交差拡散項を含んだ生物モデルは Shigesada-Kawasaki-Teramoto [4] によって提唱されて以来盛んに研究されている.

(SP) のもう一つの特徴は, Ω の一部に捕食者が入れない領域 Ω_0 があり Ω_0 では被食者は捕食されないということである. 本講演では Ω_0 のことを protection zone と呼ぶ. protection zone を伴う生物モデルの研究は, 線形拡散モデルに対しては Du などによる [1]–[3] がある. 特に [3] では, 通常では被食者が生き残れない状況下 (例えば, 捕食者の増殖率が高い場合) においても, protection zone があることで 2 種が共存可能になるかなどの観点から研究がされており, 正値定常解の存在や安定性などが調べられている.

本講演では, 非線形拡散の影響の大きさを表す係数 k に主に注目して, (SP) の正値解 (被食者と捕食者の共存状態を表す解) 集合の構造について考える.

まず, 分岐理論を用いることで (SP) の正値解の存在・非存在に関して次の結果が成り立つ.

定理 1. ある $\lambda_{\infty}^*(k, \Omega_0)$ が存在して以下が成り立つ.

- (i) $\lambda \geq \lambda_{\infty}^*(k, \Omega_0)$ のとき, 捕食者の増殖率 μ の値がどんなに大きくても (SP) に正值解が存在する.
- (ii) $\lambda < \lambda_{\infty}^*(k, \Omega_0)$ のとき, 捕食者の増殖率 μ の値が大きい場合は (SP) に正值解が存在しない.

定理 1 から, $\lambda = \lambda_{\infty}^*(k, \Omega_0)$ という被食者の増殖率の値が被食者が生存するための閾値になっていると考えることができる.

$k = 0$ のときには, 閾値は $\lambda_1^D(\Omega_0)$ で与えられることが Du-Shi [3] の結果からわかる. ただし, $\lambda_1^D(\Omega_0)$ は $-\Delta$ (領域は Ω_0 , 境界条件は斉次 Dirichlet 境界条件) の最小固有値である. 一方, $k > 0$ のときには, 閾値 $\lambda_{\infty}^*(k, \Omega_0)$ は以下のように特徴付けることができる.

定理 2. 任意の $k > 0$ に対して以下が成り立つ:

$$\lambda_{\infty}^*(k, \Omega_0) = \inf_{\{\phi \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega_0} \phi^2 dx > 0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx + \frac{\beta}{k} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \phi^2 dx}{\int_{\Omega_0} \phi^2 dx} < \frac{\beta |\Omega \setminus \Omega_0|}{k |\Omega_0|}.$$

特に, $\lambda_{\infty}^*(k, \Omega_0) < \lambda_1^D(\Omega_0)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{\infty}^*(k, \Omega_0) = 0$, $\lim_{\Omega_0 \rightarrow \Omega} \lambda_{\infty}^*(k, \Omega_0) = 0$ が成り立つ.

定理 2 は, k あるいは Ω_0 が大きくなると閾値 $\lambda_{\infty}^*(k, \Omega_0)$ が単調に減少し, $k \rightarrow \infty$ あるいは $\Omega_0 \rightarrow \Omega$ ($|\Omega \setminus \Omega_0| \rightarrow 0$) の極限では $\lambda > 0$, $\mu > 0$ の値に関わらず (SP) に正值解が存在することを意味している. 一方, $k = 0$ のときの閾値 $\lambda_1^D(\Omega_0)$ に対しては $\lambda_1^D(\Omega_0) \geq \lambda_1^D(\Omega) > 0$ ($\forall \Omega_0 \subset \Omega$) が成り立つ. これらの結果は, 非線形拡散項 (被食者が捕食者の多い場所を避けること) が被食者の生存に良い影響を及ぼすことを示唆している.

参考文献

- [1] Y. Du and X. Liang, A diffusive competition model with a protection zone, J. Differential Equations **244** (2008), 61–86.
- [2] Y. Du, R. Peng and M.X. Wang, Effect of a protection zone in the diffusive Leslie predator-prey model, J. Differential Equations **246** (2009), 3932–3956.
- [3] Y. Du and J. Shi, A diffusive predator-prey model with a protection zone, J. Differential Equations **229** (2006), 63–91.
- [4] N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, Spatial segregation of interacting species, J. Theoret. Biol. **79** (1979), 83–99.

興奮性反応拡散系における局在ドメインのさまざまな自己推進運動

太田隆夫

京都大学大学院理学研究科物理学・宇宙物理学専攻

反応拡散系は非平衡状態の秩序や運動を調べる重要な対象として応用数学、物理学、化学、工学などの分野で盛んに研究されてきた。Turing 構造やパルスの伝搬などはその典型的な現象である。最近では、細菌や細胞運動のように自己推進する系のモデルとしても大変有用であることが認識されている。特に、興奮性をもつ反応拡散系の局在したドメインの運動と相互作用は、この国の応用数学者、栄、西浦、三村らとその協力者たち、物理側ではわれわれのグループや北畑、長山、永井、住野らで研究されてきた。

本講演では、上の研究の延長として、局在ドメインがその推進速度に依存して変形する場合を考慮した理論のお話をする [1]-[6]。偏微分反応拡散方程式から界面の厚さ無限小の極限で、変形可能な自己推進ドメインの運動方程式を導出する。この理論は空間の次元が 2 次元 [2]、3 次元 [5] の両方に対して構築することができる。運動方程式のパラメータを変化させることにより、直進運動、閉じた軌跡の上での周期運動（これは反応拡散方程式の数値シミュレーションで確認されている [7]、ジグザグ運動、カオス運動など、さまざまな運動形態が分岐の結果、現れることを示す [3]。空間 3 次元では、そのほかに螺旋運動も存在する [4]。

特異摂動法を用いてドメインの運動を常微分方程式で表現する方法の利点はもとの偏微分方程式系と比べて外力の効果を容易に取り入れることができることである。たとえば、化学物質が 1 次元的に非一様に分布しているときの走化性や、重力下や電場下での自己推進運動の解析ができる。実際、外力のもとでは、新たな興味深い分岐と運動が現れる [6]。

このような数学的には未成熟な段階の理論を応用数学者の皆さんが興味をもち、さらに発展させることを期待する。

References

- [1] T. Ohta and T. Ohkuma, Phys. Rev. Lett. **102**, 154101 (2009).
- [2] T. Ohta, T. Ohkuma and K. Shitara, Phys. Rev. E **80**, 056203 (2009).
- [3] T. Hiraiwa *et al*, Europhys. Letters, **91** 20001 (2010).
- [4] T. Hiraiwa, K. Shitara and T. Ohta, Soft matter **7**, 3083 - 3086 (2011).
- [5] K. Shitara, T. Hiraiwa and T. Ohta, Phys. Rev. E **151**, 61 (2011).
- [6] M. Tarama and T. Ohta, arXiv:1106.5563 and European Physical Journal B (in press).
- [7] T. Teramoto, K. Suzuki and Y. Nishiura, Phys. Rev. E **80**, 046208 (2009).



世話人：辻川 亨，飯田雅人，北直泰，大塚浩史，矢崎成俊（宮崎大学）
連絡先：辻川 亨（宮崎大学工学部材料物理工学科）
E-mail : tujikawa@cc.miyazaki-u.ac.jp
TEL : 0985-58-7381 / 7288（事務室）FAX : 0985-58-7289