

円環領域における Liouville-Gel'fand 方程式の解の分岐構造

菅 徹*

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻

1 序

本報告は 2 次元円環領域上における Liouville-Gel'fand 方程式の, 特に非球対称解の分岐構造に関する報告である. ここで考察する Liouville-Gel'fand 方程式は

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda e^u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{LG})$$

と表される. 但し $\lambda > 0$ は (分岐) パラメータ, Ω は \mathbb{R}^2 の有界領域である. この方程式は, 気体燃焼のモデル方程式に関する定常問題, もしくは幾何的計量の実現に関する問題などで現れる. 本報告では特に Ω が 2 次元の円環領域

$$\Omega = \Omega_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2; \varepsilon < |x| < 1\} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

の場合において, (LG) の分岐構造, 即ち (λ, u) 平面における解集合を考察する. また, パラメータを $\tilde{\lambda} = \lambda \int_\Omega e^u dx$ と取り変えて, $(\tilde{\lambda}, u)$ 平面における解集合を考える場合がある. これはつまり以下の平均場方程式を考察することに対応する.

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{\lambda} \frac{e^u}{\int_\Omega e^u dx} & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{MF})$$

この方程式は定常乱流の平均場を記述するモデルとして現れる.

そもそも方程式 (LG) の分岐構造を考察するにはいくつかの理由がある. パラメータ λ を反応項 e^u の拡散項 Δu に対する強さの比率とみなせば, 分岐構造の考察は, その 2 つの項の相互作用もしくはバランスによってどのような (定常) 状態が実現されるのかを捉える一つの方法となる. また, 非線形楕円型方程式の解の存在・非存在, 一意性・多重性, 形状を求める問題の 1 つとしても興味深い. さらに本報告では, 方程式の解構造の領域に対する依存性が 1 つの議題になる. 実際, 後の節では, $\varepsilon \rightarrow 0$ とした領域の特異極限について考察する. 線形の固有値問題に対するこのような特異極限はこれまでもたくさんの研究があるが, ここではその非線形版の問題を考察するという意味合いがある.

(LG) の解の分岐構造について知られている事実, 特になるべく具体的な領域に対する結果をいくつか紹介し, それを受けて本報告の目的を述べる. まず最も単純な場合である Ω が円板領域の

*E-mail : sa7m08@math.tohoku.ac.jp

場合の事実を紹介する. この場合, Gidas-Ni-Nirenberg [7] のよく知られた結果によって, 解は全て球対称となる. このときある $\lambda^* > 0$ (単位円板のときには特に $\lambda^* = 2$) が存在して, $0 < \lambda < \lambda^*$, $\lambda = \lambda^*$, $\lambda > \lambda^*$ それぞれに対応して解の個数が 2, 1, 0 となることが確かめられる. 即ち (λ, u) 平面において, $(\lambda, u) = (0, 0)$ から発生した球対称解の枝が右に伸び, 一度 $\lambda = \lambda^*$ のときに折り返して, 超平面 $\lambda = 0$ に吸収される. また超平面 $\lambda = 0$ に近づくときには, u は原点で爆発する. より高次元の場合を含めた球領域における詳しい分岐構造は, Gel'fand [2], Joseph-Lundgren [3] によって調べられている. 円板領域以外の単連結領域に関しては, 一般の単連結領域での考察 [11, 12, 16], 円板と異なる分岐構造を持つ領域の考察 [14, 10], 複数個の点で爆発する解の構成 [6] などがある.

次に, 本報告に最も関連する 2 次元円環領域の場合について知られている結果を紹介する. この場合, 円板領域と比べて分岐構造の様相が大きく変わる. まず Lin [9] と Nagasaki-Suzuki [13] によって独立に, 球対称解に関する分岐構造が決定されている. それによれば, 球対称解は分岐図上で円板領域の場合と同じ形の枝を成す. しかし円板領域と違うのは, 超平面 $\lambda = 0$ に近づく際の爆発点が円環の内部全体となることである. このことは, 超平面 $\lambda = 0$ に近づくにつれて球対称解の Morse 指数が大きくなっていくことを示唆しており, そこから分岐する解の存在が期待される. 実際, Lin [9] は無限個の分岐点があって, そこから非球対称解が分岐することを示した. さらにその後 Dancer [1] によって分岐解のなす集合は (λ, u) 平面上非有界であることが示された. 一方で Nagasaki-Suzuki [13] は, $2\pi/k$ ($k \in \mathbb{N}$) 回転に対して対称な非球対称解で $\int_{\Omega} e^u dx$ の値が大きいようなものを得ており, また, del Pino-Kowalczyk-Musso [4] は, $\lambda \rightarrow 0$ のとき k 個の点で爆発するような解を構成している.

2 次元円環領域に対するこれらの結果をまとめると, (LG) 及び (MF) に関して図 1 のような分岐図が描ける. 図にもあるように非球対称解の大域的な構造は完全には分かってはいないが, 一連の結果から想像するに, (LG) の非球対称解の分岐構造に関して,

“分岐した非球対称解は超平面 $\lambda = 0$ の方向へ伸び, $\lambda \rightarrow 0$ のとき正多角形の頂点で爆発する”

ということが予想される. 本報告における目標は, この予想に対する示唆的な証拠を提示することである. そのためにここでは特に $\Omega = \Omega_{\varepsilon}$ の場合の, $\varepsilon \rightarrow 0$ における極限の状況を考察する. より詳しく言えば, まず最初に $\varepsilon \rightarrow 0$ のときに現れる (LG) の極限方程式を導く (次節). そしてその極限方程式の分岐構造について考察し, それを受けて, そこから示唆される事実をまとめる (第 3, 4 節).

2 極限方程式の導出

この節では接合漸近展開の方法を用いて, $\varepsilon \rightarrow 0$ における“適切な”極限として得られる方程式を導出する. ここでいう“適切な”とは, 我々が今求めようとしている非球対称解の情報を引き継いでいるという意味であり, 特異摂動問題の多くの場合で発生する「適当なスケールの変換などの下で極限操作を行わないと, 求めたいものの重要な情報が消えてしまう」ということへの注意を表している. この事情を以下で簡単に考察した上で, 極限方程式の導出に入る.

まず Lin [9] によると次のことが分かる. $\lambda \in (0, 2)$ を固定し, (LG) の球対称解 (2 つあるが大きい方を取る) を考える. これを $(\lambda, u_{\varepsilon}^{\lambda})$ と書くと,

$$\max_{c_{\varepsilon}^{\lambda} \leq |x| \leq 1} |u_{\varepsilon}^{\lambda}(x) - u^{\lambda}(x)| \rightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0$$

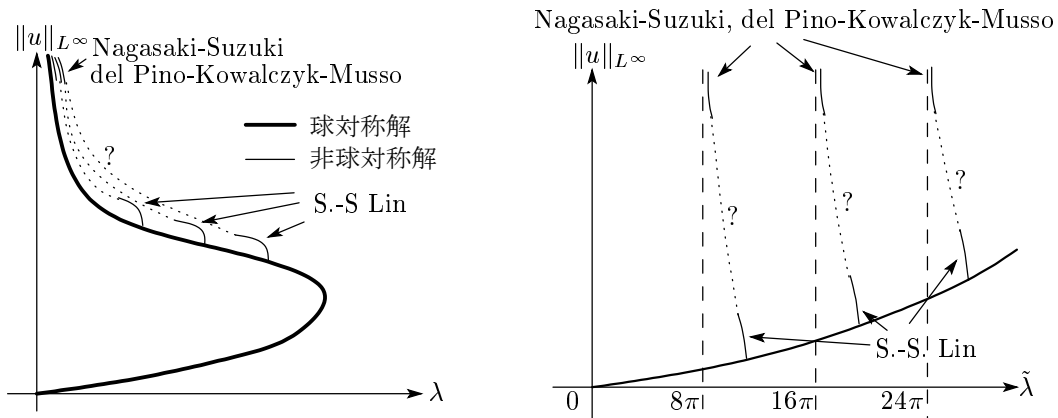
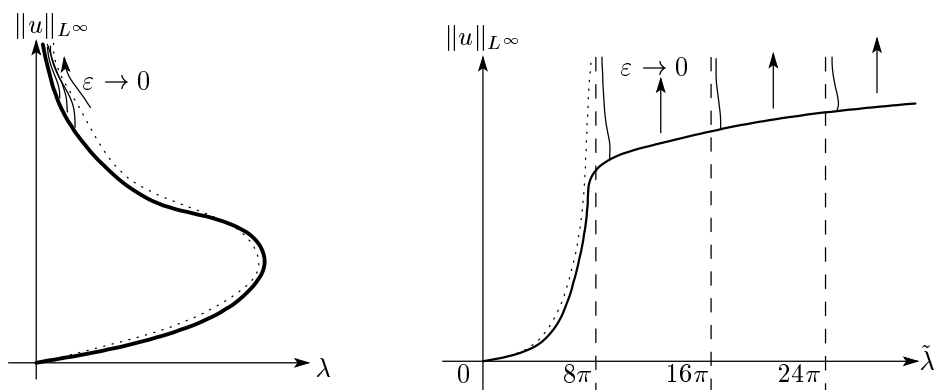


図 1: 円環領域に対する (LG) 及び (MF) の分岐図

が成り立つ。但し u^λ は単位円板 $\Omega = B := \{|x| < 1\}$ における (LG) の解 (大きい方) であり, c_ε^λ は u_ε^λ が最大値を取るような動径, 即ち $\max_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} u_\varepsilon^\lambda(x) = \max_{|x|=c_\varepsilon^\lambda} u_\varepsilon^\lambda(x)$ となる値である。これから分かることは, λ が固定された状況ではその極限として得られるのは Ω が単位円板の場合の方程式であり, 球対称解の情報しか得られないということである。また, この事実は非球対称解が分岐する点における λ の値 (λ_ε と書く) は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき $\lambda_\varepsilon \rightarrow 0$ を満たすことを意味している (図 2 左図参照)。一方, Ohtsuka [15] によれば, $\tilde{\lambda} \in (8\pi, 16\pi)$ における (MF) の解 (Ding-Jost-Li-Wang [5] によって得られた解) を $(\tilde{\lambda}, u_\varepsilon^{\tilde{\lambda}})$ と書くと,

$$\frac{e^{u_\varepsilon^{\tilde{\lambda}}}}{\int_\Omega e^{u_\varepsilon^{\tilde{\lambda}}} dx} \left(= \frac{1}{\tilde{\lambda}} \Delta u_\varepsilon^{\tilde{\lambda}} \right) \rightarrow \delta_0 \text{ weakly-* in } \mathcal{M}(\overline{B}) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0$$

となること示されている。ここで δ_0 は原点にサポートを持つデルタ関数であり, $\mathcal{M}(\overline{B})$ は $C(\overline{B})$ の双対空間である。この結果は即ち単位円板上の解に収束しないようなものは $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき原点付近で発散することを示唆する (図 2 右図参照)。



点線 は $\Omega = B$ の場合の解の枝を表す。

図 2: 円環領域に対する (LG) 及び (MF) の分岐図 ($0 < \varepsilon \ll 1$ のとき)

以上を踏まえ、極限方程式を導出する. $(\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon)$ が (LG) の解であるとする. 上での考察から、これが求めたい非球対称解であるとする. $\lambda_\varepsilon \rightarrow 0, \|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \rightarrow \infty (\varepsilon \rightarrow 0)$ となっているはずである. そこで今 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、

$$\lambda_\varepsilon = A\varepsilon^\alpha(1 + o(1)) \quad (2.1)$$

であると仮定する. 但し A, α は正定数である. さらに領域を $u_\varepsilon = O(1)$ となっている部分と $u_\varepsilon \gg 1$ となっている部分に分ける. 境界近く ($|x| \sim 1$ 又は $|x| \sim \varepsilon$) では $u_\varepsilon = O(1)$, $|x| \sim \varepsilon^\beta$ では $u_\varepsilon \gg 1$ となっているとし、それぞれ外部領域と内部領域と呼ぶことにする (図3 参照). ここで $0 < \beta < 1$ は定数である. この設定の下で、まず外部、内部領域それぞれにおける u_ε の形式的漸近展開を求める. 次にそれを外部、内部領域の間の領域において、漸近展開が一致するように接合させることによって極限方程式を得る.

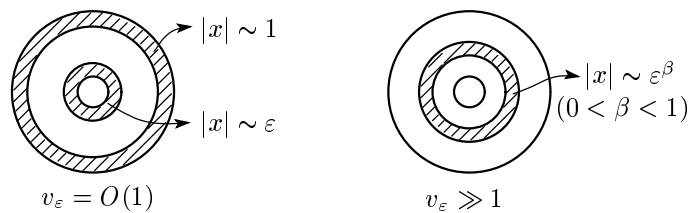


図3: 外部領域 (左) と内部領域 (右)

まず外部領域における展開を考える. 最初に外側の境界付近 ($|x| \sim 1$) での展開を求める. この領域では $u_\varepsilon = O(1)$ であることと (2.1) を仮定していることから、(LG) の右辺は小さいはずである. 従ってこの領域における u_ε の展開の主要項は

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < |x| < 1, \\ u = 0, & |x| = 1 \end{cases}$$

の解になるはずである. 比較原理から u_ε は正値となるので、主要項は少なくとも非負値関数でなくてはならない. 故に主要項は非負定数 C_1 を用いて $u(x) = C_1 \log 1/|x|$ の形になることが分かる. よって

$$u_\varepsilon(x) = C_1 \log \frac{1}{|x|} + o(1) \quad (2.2)$$

となる. この展開は $\delta_1 > 0$ を任意に固定した定数として $\delta_1 \leq |x| \leq 1$ の範囲で一様に成り立つはずである.

内側の境界近くでの展開も同様に考察できる. 結果のみ書けば、

$$u_\varepsilon(x) = C_2 \log \frac{|x|}{\varepsilon} + o(1) \quad (2.3)$$

となる. 但し C_2 は非負の未定定数であり、またこの展開は $\delta_2 > 1$ を任意に固定された定数として $\varepsilon \leq |x| \leq \delta_2 \varepsilon$ の範囲で一様に成り立つはずである.

次に内部領域における展開を考える. 内部領域は $|x| \sim \varepsilon^\beta$ の範囲であったので、 $x \mapsto \varepsilon^\beta x$ と変数変換するのが適当である. この変換によって方程式は

$$\Delta u_\varepsilon + \varepsilon^{2\beta} \lambda_\varepsilon e^{v_\varepsilon} = 0, \quad \varepsilon^{1-\beta} < |x| < \varepsilon^{-\beta}$$

と書き換えられる. 今 $\lambda_\varepsilon \varepsilon^{2\beta} e^{v_\varepsilon} = A(1 + o(1))e^{v_\varepsilon - (\alpha + 2\beta) \log 1/\varepsilon}$ であることに注意すれば, $v_\varepsilon := u_\varepsilon - (\alpha + 2\beta) \log 1/\varepsilon$ で定義される関数が

$$\Delta v_\varepsilon + A(1 + o(1))e^{v_\varepsilon} = 0, \quad \varepsilon^{1-\beta} < |x| < \varepsilon^{-\beta}$$

を満たすことが分かる. すると今次のようなことが予想できる. 内部領域においては $u_\varepsilon \gg 1$ と仮定したが, その主要項は $(\alpha + 2\beta) \log 1/\varepsilon$ であり, これが $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}$ を発散させる要因になる. そして v_ε が内部領域における u_ε の漸近的な形状を決め, $v_\varepsilon = O(1)$ となる. これを仮定すると, 内部領域における極限方程式は

$$\Delta v + Ae^v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad (2.4)$$

となることが予想される. そしてこの方程式の解 v を用いて, u_ε は

$$u_\varepsilon(x) = (\alpha + 2\beta) \log \frac{1}{\varepsilon} + v(\varepsilon^{-\beta} x) + o(1) \quad (2.5)$$

と展開されるべきである. この展開は任意に固定された $0 < \delta_3 < \delta_4$ に対して $\delta_3 \varepsilon^\beta \leq |x| \leq \delta_4 \varepsilon^\beta$ の範囲で一様に成り立つはずである.

最後に中間領域における接合を行うことで (2.4) の境界条件と未定定数に関する関係式を導く. まず外側の境界と内部領域の間の範囲で接合条件を考察する. $x = \varepsilon^{\beta/2} y$ を (2.2) 及び (2.5) に代入し, 2つの展開が等しいと仮定する. すると,

$$(\alpha + 2\beta) \log \frac{1}{\varepsilon} + u(\varepsilon^{-\beta/2} y) \sim C_1 \log \frac{1}{\varepsilon^{\beta/2} |y|},$$

即ち

$$u(\varepsilon^{-\beta/2} y) \sim -(\alpha + 2\beta - C_1 \beta) \log \frac{1}{\varepsilon} + C_1 \log \frac{1}{\varepsilon^{-\beta/2} |y|}$$

となる. よってこれから α, β, C_1 及び u は

$$\alpha + 2\beta - C_1 \beta = 0, \quad (2.6)$$

$$u(x) = C_1 \log \frac{1}{|x|} + o(1) \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

を満たしていなくてはならない. 同様にして $x = \varepsilon^{(1+\beta)/2} y$ を (2.3) と (2.5) に代入し漸近展開を比較すると,

$$u(\varepsilon^{(1-\beta)/2} y) \sim -\{\alpha + 2\beta - C_2(1 - \beta)\} \log \frac{1}{\varepsilon} + C_2 \log \varepsilon^{(1-\beta)/2} |y|$$

となる. これより次を得る.

$$\alpha + 2\beta - C_2(1 - \beta) = 0, \quad (2.8)$$

$$u(x) = C_2 \log |x| + o(1) \quad \text{as } |x| \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

以上により極限方程式 (2.4) と, その境界条件 (2.7) 及び (2.9) が得られたが, 実はそれらを考える上で C_1 と C_2 は独立ではあり得ない. より詳しく言えば, (2.4), (2.7), (2.9) の解 v が存在したとすると, $C_1 - 2 = C_2 + 2$ という関係式が成立しなくてはならない. このことは形式

的には以下のように示すことができる. v を (2.4), (2.7), (2.9) の解とし, $w(s, \theta) = v(x) + 2s$, $x = (e^s \cos \theta, e^s \sin \theta)$ とおく. すると簡単な計算により w は次を満たすことが分かる.

$$w_{ss} + w_{\theta\theta} + Ae^w = 0, \quad (s, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad (2.10)$$

$$w(s, \theta) = \begin{cases} B_2 s + o(1) & \text{as } s \rightarrow -\infty, \\ -B_1 s + o(1) & \text{as } s \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.11)$$

但し $B_1 = C_1 - 2$, $B_2 = C_2 + 2$ である. (2.10) の両辺に w_s をかけて $\mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ 上積分する. このとき (2.11) より左辺の各項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} w_{ss} w_s d\theta ds &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} w_s^2 d\theta ds = \pi(B_1^2 - B_2^2), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} w_{\theta\theta} w_s d\theta ds &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} w_{\theta} w_{s\theta} d\theta ds = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} w_{\theta}^2 d\theta ds = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} Ae^w w_s d\theta ds &= A \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} e^w d\theta ds = 0. \end{aligned}$$

と (形式的には) 計算できるので, $\pi(B_2^2 - B_1^2) = 0$, 即ち $B_1 = B_2$ を得る. この計算は実際に正当化可能である.

そこでここからは $C_1 - 2 = C_2 + 2 =: B (\geq 2)$ の下で考える. このとき (2.6) と (2.8) より α , β は B を用いて

$$\alpha = \frac{1}{2}(B - 2), \quad \beta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{B} \right)$$

と表される. α, β は正であるべきであるから, $B = 2$ のときは形式的展開は破綻する. これは仮定 (2.1) が正しくないのと, 内部領域における展開式が通用する領域が狭いためである. ここではその修正については考察はしないが, 少なくとも $B = 2$ の場合にも極限方程式は (LG) の情報を持っているはずであるから, この場合も改めて極限方程式を考察する.

3 極限方程式の解の分岐構造

この節では前節で得た極限方程式

$$\Delta v + Ae^v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (3.1)$$

$$v(x) = \begin{cases} (B - 2) \log |x| + o(1) & \text{as } |x| \rightarrow 0, \\ -(B + 2) \log |x| + o(1) & \text{as } |x| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.2)$$

の分岐構造について考察し, そこから示唆されることについて言及する.

まず球対称解を考える. (2.10) から分かるように, この場合方程式は自励系の常微分方程式に帰着され, その一般解を得ることによって全ての球対称解を求めることができる. (3.1)-(3.2) は $A = 2B^2$ のとき, そのときに限り球対称解を持ち, その解はパラメータ $K \geq 1$ を用いて

$$(A, B, v) = (8K^2, 2K, U_K), \quad U_K(r) = \log \frac{1}{r^2(r^K + r^{-K})^2} \quad (3.3)$$

と表される. 但し $r = |x|$ である.

次に非球対称解について考える. 得られた極限方程式はそれ自身がまた非線形方程式であるため, 非球対称解を求めることは容易ではない. しかしながら幸運なことに, 特殊解を具体的に見つけることができる. 実際, 簡単な計算により, 以下が方程式を満たすことが分かる.

$$(A, B, v) = (8k^2(1 - \rho^2), 2k, U_{k,\rho,\gamma}),$$

$$U_{k,\rho,\gamma}(r, \theta) = \log \frac{1}{r^2 \{r^k + r^{-k} - 2(1 - \rho)^{1/2} \cos(k\theta + \gamma)\}^2}. \quad (3.4)$$

ここで $x = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $k \in \mathbb{N}$, $\rho \in (0, 1)$ そして $\gamma \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ である. パラメータ k は回転方向に関する振動の数を表し, ρ は dilation, γ は方程式の回転不変性を示すパラメータである.

(3.3), (3.4) を (A, B) 平面もしくは (A, B, v) 空間に書いた分岐図が図 4 である. 図から分かるように, 非球対称解が $(A, B) = (8k^2, 2k)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) のときに分岐し, それが $\rho \rightarrow 1$ のときに爆発する. このときの爆発点は正 k 角形の頂点であることも表示式から分かる. 前節での形式的展開 (2.1) より, ρ の増加に伴い λ_ε は減少するはずであるから, 第 1 節での分岐図に関する予想の正しさがここから示唆される. また, 筆者 [8] によって, (3.3), (3.4) からなる (A, B, v) 空間における解の集合

$$\{(8K^2, 2K, U_K)\}_{K \geq 1} \cup \{(8k^2(1 - \rho^2), 2k, U_{k,\rho,\gamma})\}_{k \in \mathbb{N}, \rho \in (0,1), \gamma \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}$$

の上には, $\{(8k^2, 2k, U_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ の他に分岐点がないことが示されている. このことから (LG) の分岐非球対称解上からさらに分岐することはないということが予想される.

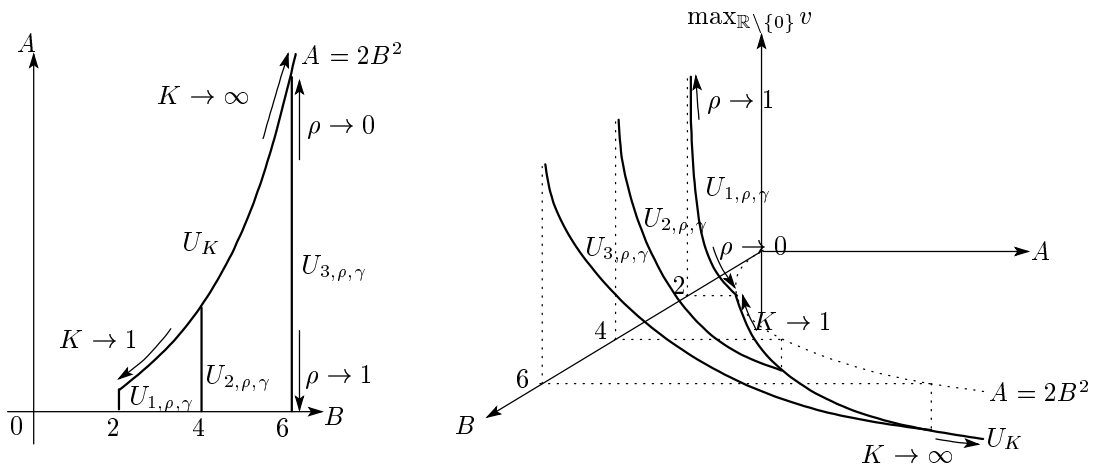


図 4: (3.1)-(3.2) の分岐図

図 5 左図は平均場方程式に対応する分岐図である. 即ち, $\Lambda := A \int_{\mathbb{R}^2} e^v dx$ を新しいパラメータとして, それを横軸に取り図を書いたものである. 簡単な計算により,

$$\Lambda = \begin{cases} 8\pi K & ((A, B, u) = (8K^2, 2K, U_K) \text{ のとき}) \\ 8\pi k & ((A, B, u) = (8k^2(1 - \rho^2), 2k, U_{k,\rho,\gamma}) \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることが分かるので, ちょうど $\Lambda = 8\pi k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) のところで非球対称解が分岐することが見てとれる. 図 5 右図は左の分岐図の縦軸の値に

$$(\alpha + 2\beta) \log \frac{1}{\varepsilon} = \left(\frac{B}{2} - \frac{2}{B}\right) \log \frac{1}{\varepsilon} = \left(\frac{\Lambda}{8\pi} - \frac{8\pi}{\Lambda}\right) \log \frac{1}{\varepsilon}$$

を加えたものである. 前節での形式的展開 (2.5) を見れば, これが (MF) の $\tilde{\lambda} \geq 8\pi$ における分岐図の近似になっているであろうと考えられる.

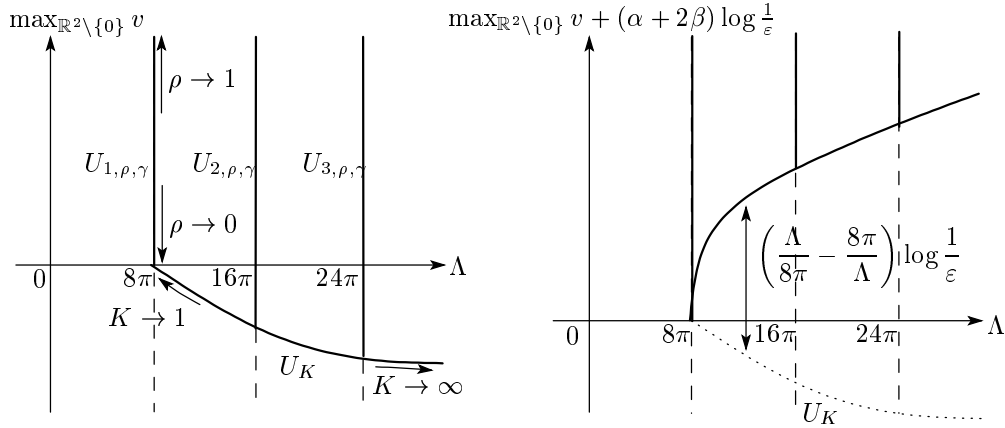


図 5: 横軸に Λ をとった (3.1)-(3.2) の分岐図

4 まとめと課題

前節の考察によって (LG) 及び (MF) の大域的な分岐構造に関する示唆を与えることができた. また, 第 2 節の計算により, 形式的な解を構成することに成功した. 詳しく言えば, $k \geq 2$ に対して, 次のような漸近系を持つ (LG) の非球対称解 $(\lambda_\epsilon, u_\epsilon)$ が存在すると思われる.

$$\lambda_\epsilon = 8k^2 \epsilon^{k-1} \left(1 + O \left(\epsilon^{k-1} \log \frac{1}{\epsilon} \right) \right),$$

$$u_\epsilon(x) = \left(k - \frac{1}{k} \right) \log \frac{1}{\epsilon} + U_{k,\rho,\gamma} \left(\epsilon^{\frac{k-1}{2k}} r, \theta \right) + O \left(\epsilon^{\frac{k-1}{2}} \right) \quad \text{in } L^\infty(\Omega_\epsilon).$$

この展開は, さらに高次の項まで形式的に計算が可能である. $k = 1$ のときには $B = 2$ に対応するので, 第 2 節の展開はうまくいかないが, 修正を加えた議論をすることで, 次のような形式的解が構成できる.

$$\lambda_\epsilon = 8\delta_\epsilon (1 + o(1)),$$

$$u_\epsilon(x) = 4 \log \frac{1}{\delta_\epsilon} + \log \frac{1}{(\delta_\epsilon^{-1} r)^2 \{ (\delta_\epsilon^{-1} r)^{\kappa_\epsilon} + (\delta_\epsilon^{-1} r)^{-\kappa_\epsilon} - 2(1-a)^{1/2} \cos(\theta + \gamma) \}^2} + O \left(\delta_\epsilon \log \frac{1}{\delta_\epsilon} \right) \quad \text{in } L^\infty(\Omega_\epsilon).$$

ただし δ_ϵ は $2\delta_\epsilon^{-1} \log \delta_\epsilon = \log \epsilon$ を満たす正の数で, また $\kappa_\epsilon = 1 + \delta_\epsilon + o(\delta_\epsilon)$ である. 今後の課題は, これらの形式解から実際に真の解が構成できるかということである. このことは現在研究中であるが, 証明の手立ても大分揃ってきており, うまくいくことを信じている.

また, 第 2 節での方法は円環領域に限らず, もっと一般の領域に対しても適用可能かもしれない. さらに違う方程式, 問題にもここでの議論が応用できるかもしれないので, 今後の研究として発展させていきたい.

参考文献

- [1] E. N. Dancer, *Global breaking of symmetry of positive solutions on two-dimensional annuli*, Differential Integral Equations **5** (1992), 903–913.
- [2] I. M. Gel'fand, *Some problems in the theory of quasilinear equations*, Amer. Math. Soc. Transl. **29** (1963), 295–381.
- [3] D. D. Joseph and T. S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rational Mech. Anal. **49** (1972/73), 241–269.
- [4] M. del Pino, M. Kowalczyk and M. Musso, *Singular limits in Liouville-type equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations **24** (2005), 47–81.
- [5] W. Ding, J. Jost, J. Li and G. Wang, *Existence results for mean field equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **16** (1999), 653–666.
- [6] P. Esposito, M. Grossi and A. Pistoia, *On the existence of blowing-up solutions for a mean field equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **22** (2005), 227–257.
- [7] B. Gidas, W. M. Ni, and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209–243.
- [8] T. Kan, *Global structure of the solution set for a semilinear elliptic problem related to the Liouville equation on an annulus*, submitted.
- [9] S.-S. Lin, *On non-radially symmetric bifurcation in the annulus*, J. Differential Equations **80** (1989), 251–279.
- [10] N. Mizoguchi and T. Suzuki, *Equations of gas combustion: S-shaped bifurcation and mushrooms*, J. Differential Equations **134** (1997), 183–215.
- [11] K. Nagasaki and T. Suzuki, *On the nonlinear eigenvalue problem $\Delta u + \lambda e^u = 0$* , Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), 591–608.
- [12] K. Nagasaki and T. Suzuki, *Nonlinear eigenvalue problem $\Delta u + \lambda e^u = 0$ on simply connected domains in \mathbb{R}^2* , Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **65** (1989), 1–3.
- [13] K. Nagasaki and T. Suzuki, *Radial and nonradial solutions for the nonlinear eigenvalue problem $\Delta u + \lambda e^u = 0$ on annuli in \mathbb{R}^2* , J. Differential Equations **87** (1990), 144–168.
- [14] S. Nakane, *A bifurcation phenomenon for a Dirichlet problem with an exponential nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. **161** (1991), 227–240.
- [15] H. Ohtsuka, *A concentration phenomenon around a shrinking hole for solutions of mean field equations*, Osaka J. Math. **39** (2002), 395–407.
- [16] T. Suzuki, *Global analysis for a two-dimensional elliptic eigenvalue problem with the exponential nonlinearity*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **9** (1992), 367–397.

