エネルギー臨界冪を持つ非線形シュレディンガー方程式に対する基底状態の存在性と散乱・爆発問題

赤堀公史 (静岡大・工) *

次の非線形シュレディンガー方程式を考える:

$$2i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi+\mu|\psi|^{p-1}\psi+|\psi|^{\frac{4}{d-2}}\psi=0. \tag{NLS}$$

ここで, $\psi=\psi(x,t)$ は $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ $(d\geq 3)$ 上の複素数値未知関数, Δ は $\mathbb{R}^d$ 上の Laplace 作用素, $\mu\in\mathbb{R}$, $1+\frac{4}{d}<p<1+\frac{4}{d-2}$ である.

まず方程式 (NLS) に対する初期値問題の時間局所適切性について触れる (証明は [4, 9] を参照); 任意の $t_0\in\mathbb{R}$ と $\psi_0\in H^1(\mathbb{R}^d)$ に対し, t_0 を含む開区間 I と, $\psi|_{t=t_0}=\psi_0$ を満たす (NLS) の (弱) 解 $\psi\in C(I,H^1(\mathbb{R}^d))$ が存在する. さらに, $C(I,H^1(\mathbb{R}^d))$ に属する解は一意的である.

次に, 方程式 (NLS) を不変にする変換と, 保存則について触れる.

方程式 (NLS) は次の変換に対して不変である:

時間平行移動:

$$\psi(x,t)\mapsto\psi(x,t+a),\qquad a\in\mathbb{R},$$

ゲージ変換:

$$\psi(x,t)\mapsto e^{i\theta}\psi(x,t),\qquad \theta\in[0,2\pi),$$

空間平行移動:

$$\psi(x,t)\mapsto\psi(x+b,t),\qquad b\in\mathbb{R}^d,$$

ガリレイ変換:

$$\psi(x,t)\mapsto e^{i(vx-\frac{1}{2}|v|^2t)}\psi(x-vt,t),\qquad v\in\mathbb{R}^d.$$

また, 方程式 (NLS) の解 ψ に対し, 次の量は時間 t に関して不変である:

*Slim Ibrahim 氏 (University of Victoria), 菊池弘明氏 (東京電機大), 名和範人氏 (大阪大) との共同研究

エネルギー:

$$E(\psi(t)) := \|\nabla\psi(t)\|_{L^2}^2 - \frac{2\mu}{p+1}\|\psi(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \frac{d-2}{d}\|\psi(t)\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}^{\frac{2d}{d-2}}$$

質量:

$$M(\psi(t)) := \|\psi(t)\|_{L^2}^2$$

運動量:

$$\vec{p}(\psi(t)) := \mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^d} \nabla\psi(x,t)\overline{\psi(x,t)}\,dx$$

さて, 方程式 (NLS) に対して, 次のような解 $\psi \in C(I_{\max}, H^1(\mathbb{R}^d))$ の存在が考えられる. ここで, $I_{\max}$ は ψ の最大存在区間を表す:

爆発解: $|I_{\max}| < \infty$ となる解.

定在波: ある $\omega \geq 0$ と $Q \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ が存在して, $\psi(x,t) = e^{\frac{i}{2}\omega t}Q(x)$ と表わされる解.

散乱解: $I_{\max} = \mathbb{R}$ で, 線形シュレディンガー方程式 $2i\dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0$ の解 $u_+, u_- \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^d))$ が存在し,

$$\lim_{t\to+\infty}\|\psi(t) - u_+(t)\|_{H^1} = \lim_{t\to-\infty}\|\psi(t) - u_-(t)\|_{H^1} = 0$$

となる解.

一般に, 分散性が勝った状況では散乱解, 非線形性が勝った状況では爆発解, 分散性と非線形性が釣り合った状況では定在波が生じる.

周波数 $\omega \geq 0$ を持つ定在波 $\psi(x,t) = e^{\frac{i}{2}\omega t}Q(x)$ の存在は, 次の楕円型方程式の解の存在と同値である:

$$-\omega Q + \Delta Q + \mu|Q|^{p-1}Q + |Q|^{\frac{4}{d-2}}Q = 0, \qquad Q \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}. \tag{SP}$$

方程式 (SP) の解の中で, 作用 $S_\omega := \omega M + E$ が最小なものは基底状態と呼ばれる. 我々の目的の 1 つは, 方程式 (SP) の基底状態の存在・非存在を明らかにする事である.

Pohozaev 等式を使った議論により, 方程式 (SP) の解の非存在性の情報が得られる. 実際, 方程式 (SP) の解 Q は Pohozaev 等式

$$\omega\|Q\|_{L^2}^2 = \mu\left(1 - \frac{d(p-1)}{2(p+1)}\right)\|Q\|_{L^{p+1}}^{p+1} \tag{1}$$

を満たすため,[1] $p < 1 + \frac{4}{d-2}$ の仮定から, 解の非存在性に関する次の表が得られる:

[1]形式的には, 方程式 (SP) に Q を掛けて積分したものと, $x\nabla Q$ を掛けて積分したものを組み合わせれば得られる.

表 1: 方程式 (SP) の解の非存在

	$\mu < 0$	$\mu = 0$	$\mu > 0$
$\omega = 0$	非存在		非存在
$\omega > 0$	非存在	非存在	

Pohozaev 等式からは分からない $\omega = \mu = 0$ の時は,

$$Q_0(x) := \left(\frac{\sqrt{d(d-2)}}{1+|x|^2} \right)^{\frac{d-2}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R}^d) \tag{2}$$

が方程式 (SP) の基底状態を与える事が分かっている ([3, 8] 参照).

残った $\omega > 0$ かつ $\mu > 0$ の場合に関して, 次の結果を得る事ができた [1]:

Theorem 1. *$\omega > 0$, $\mu > 0$ とする.*
(i) $d \geq 4$ ならば, 方程式 (SP) の基底状態 Q_ω で,

$$S_\omega(Q_\omega) = \min \left\{ S_\omega(u) \;\middle|\; u \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\},\ K(u) = 0 \right\} \tag{3}$$

を満たすものが存在する.[2] ここで,

$$K(\psi(t)) := \|\nabla \psi(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\mu d(p-1)}{2(p+1)} \|\psi(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \|\psi(t)\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}^{\frac{2d}{d-2}}. \tag{4}$$

(ii) $d = 3$ で, ω に対して μ が十分小さい場合は, 方程式 (SP) の基底状態は存在しない.

Theorem 1 で登場した汎関数 K は, 方程式 (NLS) の解の性質を知るうえで重要な役割を果たす. これを説明するために, "十分良い" 解 ψ と, その分散 (variance)

$$V(\psi(t)) := \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |\psi(x,t)|^2 \, dx$$

を考える. 簡単な計算から,

$$\frac{d^2}{dt^2} V(\psi(t)) = 4K(\psi(t)) \tag{5}$$

が分かる. さらに, 等式 (5) を時間に関して 2 回積分すれば, Virial 等式と呼ばれる次の等式が得られる[3]:

$$V(\psi(t)) = V(\psi_0) + 2t\Im \int_{\mathbb{R}^d} x \nabla \psi_0(x) \overline{\psi_0(x)} \, dx + 4 \int_0^t \int_0^{t'} K(\psi(t'')) \, dt'' dt'. \tag{6}$$

[2]方程式 (SP) の解 Q は $K(Q) = 0$ を満たす.
[3]等式 (5) も Virial 等式と呼ばれる.

ここで, $\psi_0 := \psi|_{t=0}$ である．$I_{\max} = \mathbb{R}$ かつ $\inf_{t\in\mathbb{R}} K(\psi(t)) > 0$ とすると, Virial 等式から

$$V(\psi(t)) \gtrsim V(\psi_0) - t + t^2$$

が従う．よって, $\lim_{t\to+\infty} V(\psi(t)) = +\infty$ である事から, 波が無限遠方に伝播する事になる．一方, $\sup_{t\in I_{\max}} K(\psi(t)) < 0$ とすると,

$$V(\psi(t)) \lesssim V(\psi_0) + t - t^2$$

が従う．よって, $|t| \gg 1$ に対し, $V(\psi(t)) < 0$ となってしまうので ($V(\psi(t)) \geq 0$ である!), $|I_{\max}| < \infty$ でなければならない．つまり, ψ は爆発解である．

我々の考えている解 $\psi \in C(I_{\max}, H^1(\mathbb{R}^d))$ に対しては, 分散 $V(\psi(t))$ が有限な値になるとは限らない．そのため, 上の考察は形式的なものである．しかし, 汎関数 K は $\psi \in C(I_{\max}, H^1(\mathbb{R}^d))$ に対して意味を持つので利用する事ができる．また, Virial 等式 (6) に対しては, Ogawa-Tsutsumi[7] によって導入された "一般化 Virial 等式" で代用できる．

さて, Theorem 1 で見つけた基底状態 Q_ω を利用して, 次のような集合を導入する:

$$A_\omega := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^d) \;\middle|\; \mathcal{S}_\omega(u) < \mathcal{S}_\omega(Q_\omega) \right\}, \tag{7}$$

$$PW := \bigcup_{\omega>0} A_\omega. \tag{8}$$

作用 $S_\omega = \omega M + E$ は方程式 (NLS) に対する保存量であるから, PW から出発した方程式 (NLS) の解は, PW から出る事はできない (不変集合である!)．さらに, 方程式 (SP) の解 Q に対して,

$$S_\omega(Q_\omega) \leq S_\omega(Q) = S_\omega(e^{\frac{i}{2}\omega t} Q)$$

であるから, PW の中には, 定在波が存在しない．

我々の次なる目的は, PW に属する解の挙動を, 散乱・爆発の立場から分類する事である．そのために, 汎関数 K を利用して,

$$PW_+ := \left\{ u \in PW \;\middle|\; K(u) > 0 \right\}, \tag{9}$$

$$PW_- := \left\{ u \in PW \;\middle|\; K(u) < 0 \right\} \tag{10}$$

とする．この時, 基底状態 Q_ω の性質 (3) から,

$$PW = PW_+ \cup \{0\} \cup PW_-$$

である事と, PW_+ と PW_- は方程式 (NLS) に対する不変集合である事が分かる．

さらに, PW に属する解の挙動に関する次の結果が得られた [1, 2]:

Theorem 2. $d \geq 5,\ \mu > 0,\ \omega > 0$ とする. この時, 次が成立する:
(i) PW_+ に属する初期値から出発した解は, 散乱解である.
(ii) PW_- に属する球対称な初期値から出発した解は, 爆発解である.

この定理から, 基底状態 Q_ω が 2 種類の不安定性を持つ事が分かる.

Theorem 1 (i) と Theorem 2 の結果は, $\mu|\psi|^{p-1}\psi$ を, $\mu_1|\psi|^{p_1-1}\psi + \cdots + \mu_k|\psi|^{p_k-1}\psi$ ($k \in \mathbb{N}$, $\mu_1, \ldots, \mu_k > 0$, $1 + \frac{4}{d} < p_1, \ldots, p_k < 1 + \frac{4}{d-2}$) を含むような, より一般的な項にしても示す事ができる ([2] 参照).

最後に, Theorem 2 の証明の概略を与える.

$$A_{\omega,+} := \left\{ u \in A_\omega \;\middle|\; K(u) > 0 \right\}, \qquad A_{\omega,-} := \left\{ u \in A_\omega \;\middle|\; K(u) < 0 \right\} \tag{11}$$

とし, $A_{\omega,+}$ に属する初期値から出発した解は散乱解, $A_{\omega,-}$ に属する球対称な初期値から出発した解は爆発解である事を示せば十分である.

Theorem 2 (i) を証明するためには, Kenig-Merle[5] によって考案された "背理法と凝集コンパクト性の議論を組み合わせた方法" を用いる.

まず, $m > 0$ に対し,

$$A_{\omega,+}(m) := \left\{ u \;\middle|\; \mathcal{S}_\omega(u) < m,\ K(u) > 0 \right\}$$

と定義する. 明らかに, $A_{\omega,+} = A_{\omega,+}(S_\omega(Q_\omega))$ である. さらに,

$$m_\omega^* := \sup\left\{ m > 0 \;\middle|\; A_{\omega,+}(m) \text{ から出発した解は散乱解} \right\}$$

とする. この時, "small data theory" から $0 < m_\omega^*$, 基底状態 Q_ω の存在から $m_\omega^* \leq S_\omega(Q_\omega)$ が分かる. よって Theorem 2 (i) を証明するためには, $m_\omega^* = S_\omega(Q_\omega)$ を示せば良い.

ここで, $m_\omega^* < S_\omega(Q_\omega)$ と仮定すると, 次を満たす (NLS) の時間大域解 Ψ の存在が示せる:

$$\mathcal{S}_\omega(\Psi(t)) = m_\omega^*, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} K(\Psi(t)) > 0, \tag{13}$$

$$\vec{p}(\Psi(t)) = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0,\ \exists R_\varepsilon > 0,\ \exists \vec{\gamma}_\varepsilon \in C([0,\infty), \mathbb{R}^d),\ \forall t \geq 0, \\ \int_{|x - \vec{\gamma}_\varepsilon(t)| < R_\varepsilon} |\Psi(x,t)|^2 + |\nabla\Psi(x,t)|^2 dx > \|\Psi(t)\|_{H^1}^2 - \varepsilon. \end{gathered} \tag{15}$$

性質 (13) と一般化 Virial 等式 ([7] 参照) を用いると, Ψ は無限遠方に伝播する事になる. 一方, 運動量が 0 (性質 (14)) であるから, 重心に相当する $\vec{\gamma}_\varepsilon(t)$ はあまり動く

事ができない．しかも性質 (15) から, $\vec{\gamma}_\varepsilon(t)$ から距離 R_ε の範囲にほぼ全ての量が集まっている．よって, Ψ は無限遠方に伝播する事はできず矛盾が生じる; こうして, $m^*_\omega = S_\omega(Q_\omega)$ が従う．

一方, $A_{\omega,-}$ から出発した解 ψ に対し,

$$\sup_{t \in I_{\max}} \mathcal{K}(\psi(t)) < 0$$

を示す事ができる． よって, 一般化 Virial 等式を用いた議論 ([6, 7] 参照) により, Theorem 2 (ii) が従う．

参考文献

[1] Akahori, T., Ibrahim, S., Kikuchi, H. and Nawa, H., Existence of a ground state and blow-up problem for a nonlinear Schrödinger equation with critical growth. Differential Integral Equations **25** (2012) 383–402.

[2] Akahori, T., Ibrahim, S., Kikuchi, H. and Nawa, H., Existence of a ground state and scattering for a nonlinear Schrödinger equation with critical growth. Preprint.

[3] Aubin, T., Problémes isopérimétriques et espaces de Sobolev. J. Differential Geom. **11** (1976), 573–598.

[4] Cazenave, T. and Weissler, F.B., The Cauchy problem for the critical nonlinear Schödinger equation in H^s, Nonlinear Anal. **14** (1990), 807–836.

[5] Kenig, C.E. and Merle, F., Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case. Invent. Math. **166** (2006), 645–675.

[6] Nawa, H., Asymptotic and Limiting Profiles of Blowup Solutions of the Nonlinear Schrödinger Equations with Critical Power, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), 193-270.

[7] Ogawa, T. and Tsutsumi, Y., Blow-up of H^1-solution for the nonlinear Schrödinger equation. J. Differential Equations **92** (1991) 317–330.

[8] Talenti, G., Best constant in Sobolev inequalities. Ann. Mat. Pura. Appl. **110** (1976), 353–372.

[9] Tao, T. and Visan, M., Stability of energy-critical nonlinear Schrödinger equations in high dimensions, Electron. J. Differential Equations **118** (2005), 1–28.