被食者のためのprotection zoneが存在する 被食者-捕食者モデルについて

大枝 和浩（早稲田大学）

偏微分方程式と現象：PDEs and Phenomena in Miyazaki 2011
2011年11月19日

被食者-捕食者モデル(P)

$$
\begin{cases}
u_t = \Delta[(1+k\rho(x)v)u] + u(\lambda - u - b(x)v) & \text{in } \Omega\times(0,\infty),\\
v_t = \Delta v + v(\mu + cu - v) & \text{in } \Omega\backslash\bar{\Omega}_0\times(0,\infty),\\
\partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty),\\
\partial_n v = 0 & \text{on } \partial(\Omega\backslash\bar{\Omega}_0)\times(0,\infty).
\end{cases}
$$

Ω, Ω_0 : $\mathbb{R}^N$の有界領域($\Omega_0 \subset \Omega$, $N \geq 1$).

$\partial\Omega, \partial\Omega_0$: Ω, Ω_0の滑らかな境界.

$u(x,t)$: Ωに生息する被食者の個体数密度.

$v(x,t)$: $\Omega\backslash\Omega_0$に生息する捕食者の個体数密度.

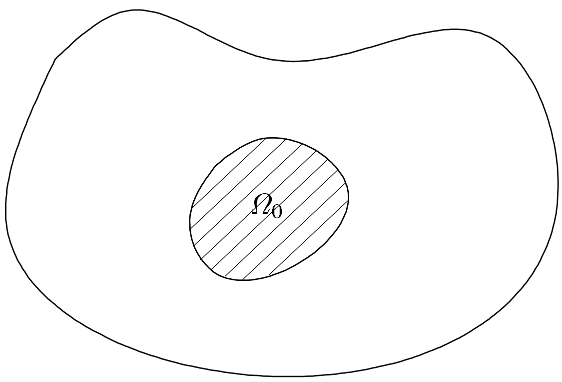


Fig.1. Protection zone Ω_0.

$$N \geq 2 \Rightarrow \bar{\Omega}_0 \subset \Omega.$$

$$N = 1,\ \Omega = (a_1, a_2) \Rightarrow \Omega_0 = (a, a_2) \text{ for some } a \in (a_1, a_2).$$

被食者-捕食者モデル(P)

$$\begin{cases} u_t = \Delta[(1+k\rho(x)v)u] + u(\lambda - u - b(x)v) & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ v_t = \Delta v + v(\mu + cu - v) & \text{in } \Omega\backslash\bar{\Omega}_0\times(0,\infty), \\ \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty), \\ \partial_n v = 0 & \text{on } \partial(\Omega\backslash\bar{\Omega}_0)\times(0,\infty). \end{cases}$$

$\lambda > 0$: 被食者の増殖率.

$\mu \in \mathbb{R}$: 捕食者の増殖率.

$k \geq 0$, $c > 0$.

3

被食者-捕食者モデル(P)

$$\begin{cases} u_t = \Delta[(1+k\rho(x)v)u] + u(\lambda - u - b(x)v) & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ v_t = \Delta v + v(\mu + cu - v) & \text{in } \Omega\backslash\bar{\Omega}_0\times(0,\infty), \\ \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty), \\ \partial_n v = 0 & \text{on } \partial(\Omega\backslash\bar{\Omega}_0)\times(0,\infty). \end{cases}$$

$$\rho = \chi_{\Omega\backslash\Omega_0} = \begin{cases} 1 & \text{in } \Omega\backslash\Omega_0, \\ 0 & \text{in } \Omega_0, \end{cases} \qquad b = \begin{cases} \beta & \text{in } \Omega\backslash\Omega_0, \\ 0 & \text{in } \Omega_0. \end{cases}$$

ただし, βは正定数.

4

被食者-捕食者モデル(P)

$$\begin{cases} u_t = \Delta[(1+k\rho(x)v)u] + u(\lambda - u - b(x)v) & \text{in } \Omega\times(0,\infty), \\ v_t = \Delta v + v(\mu + cu - v) & \text{in } \Omega\backslash\bar{\Omega}_0\times(0,\infty), \\ \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,\infty), \\ \partial_n v = 0 & \text{on } \partial(\Omega\backslash\bar{\Omega}_0)\times(0,\infty). \end{cases}$$

Cross-diffusion $k\Delta[\rho(x)vu]$

捕食者の個体数密度が高いほど被食者の拡散が促進される.

Cross-diffusionモデル : Shigesada-Kawasaki-Teramoto ’79

5

定常問題(SP)

$$\begin{cases} \Delta[(1+k\rho(x)v)u] + u(\lambda - u - b(x)v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta v + v(\mu + cu - v) = 0 & \text{in } \Omega\backslash\bar{\Omega}_0, \\ \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \partial_n v = 0 & \text{on } \partial(\Omega\backslash\bar{\Omega}_0). \end{cases}$$

(SP)の正値解(共存解)集合の構造は？

6

既知の結果（非線形拡散項が無い場合）

$$\begin{cases} \Delta u + u(\lambda - u - b(x)v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta v + v(\mu + cu - v) = 0 & \text{in } \Omega\backslash\bar{\Omega}_0, \\ \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \partial_n v = 0 & \text{on } \partial(\Omega\backslash\bar{\Omega}_0). \end{cases}$$

$\lambda > 0$: 被食者の増殖率.

$\mu \in \mathbb{R}$: 捕食者の増殖率.

7

既知の結果（非線形拡散項が無い場合）

定義

$\lambda_1^D(\Omega_0)$: $-\Delta$ in Ω_0 の最小固有値（境界条件はDirichlet．ただし，$N=1$のときは，$\phi(a) = \phi'(a_2) = 0$）．

命題（Du-Shi '06）

$k=0$とする.

(i) $\mu \geq 0$の場合.

(SP)に正値解が存在する$\Leftrightarrow \lambda > {}^{\exists}\lambda^*(\mu, \Omega_0)$.

ここで，$\lim_{\mu\to\infty} \lambda^*(\mu, \Omega_0) = \lambda_1^D(\Omega_0)$.

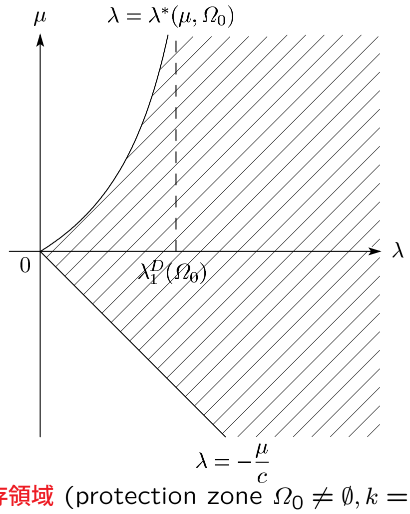
(ii) $\mu < 0$の場合.

(SP)に正値解が存在する$\Leftrightarrow \lambda > -\mu/c$.

8

λ : 分岐パラメータ

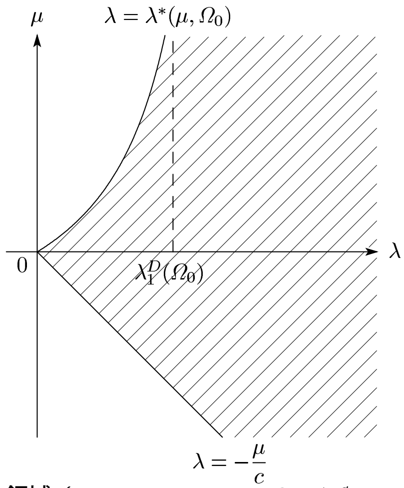
$\mu > 0$ のとき，$\lambda = \lambda^*(\mu, \Omega_0)$ で $(u, v) = (0, \mu)$ から正値解が分岐する．
$\mu < 0$ のとき，$\lambda = -\mu/c$ で $(u, v) = (\lambda, 0)$ から正値解が分岐する．



共存領域 (protection zone $\Omega_0 \neq \emptyset, k = 0$).

λ : 分岐パラメータ

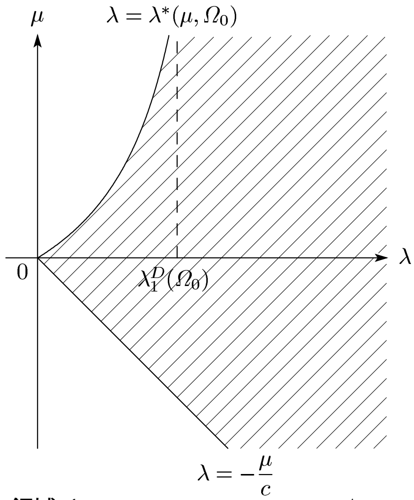
$\mu > 0$ のとき，$\lambda = \lambda^*(\mu, \Omega_0)$ で $(u, v) = (0, \mu)$ から正値解が分岐する．
$\mu > 0$ のとき，$(\lambda, 0)$ は不安定．



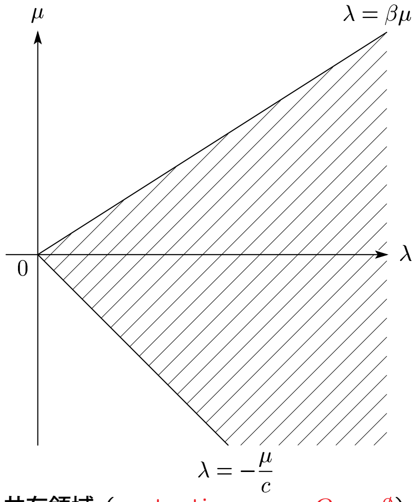
共存領域 (protection zone $\Omega_0 \neq \emptyset, k = 0$).

注意

$\lambda_1^D(\Omega_0)$: 被食者が生存できるかどうかの閾値．



共存領域 (protection zone $\Omega_0 \neq \emptyset, k = 0$).



共存領域 (protection zone $\Omega_0 = \emptyset$).

12

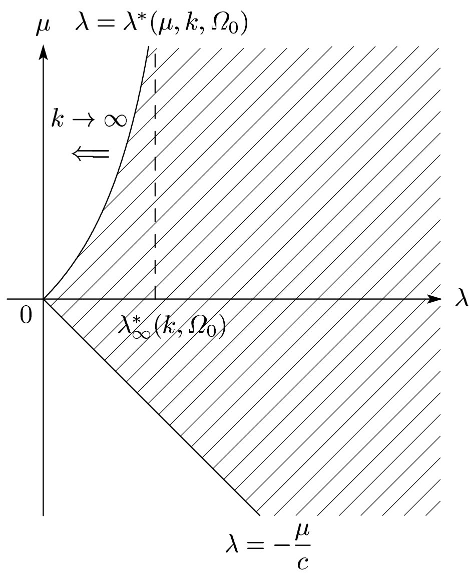
定常問題(SP)

$$\begin{cases} \Delta[(1+k\rho(x)v)u] + u(\lambda - u - b(x)v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta v + v(\mu + cu - v) = 0 & \text{in } \Omega\backslash\bar{\Omega}_0, \\ \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \partial_n v = 0 & \text{on } \partial(\Omega\backslash\bar{\Omega}_0). \end{cases}$$

Topics

1. (SP)の正値解の存在定理.
2. 閾値のkとΩ_0に対する依存性.
3. (SP)の正値解の$k \to \infty$のときの漸近挙動.
4. (SP)の正値解の$\mu \to \infty$のときの漸近挙動.

13



共存領域 (protection zone $\Omega_0 \neq \emptyset, k > 0$).

14

定義

$\lambda_1^N(q,\Omega)$: $-\Delta + q$ in Ω (Neumann)の最小固有値.

補題 1

集合

$$\left\{(\lambda,\mu)\in[0,\infty)\times[0,\infty) : \lambda_1^N\left(\frac{b(x)\mu-\lambda}{1+k\rho(x)\mu},\Omega\right)=0\right\}$$

は$\{(\lambda^*(\mu,k,\Omega_0),\mu) : \mu\geq 0\}$の形に表される. ただし,

- $\mu\mapsto\lambda^*(\mu,k,\Omega_0) : [0,\infty)\to[0,\infty)$は連続で狭義単調増加,
- $\lambda^*(0,k,\Omega_0)=0$,
- $\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)<\beta\mu$ for $^\forall\mu>0$,
- $\lambda^*_\infty(k,\Omega_0) := \lim_{\mu\to\infty}\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)\leq\lambda_1^D(\Omega_0)$.

15

(SP)の解の定義

$$\begin{cases}\Delta[(1+k\rho(x)v)u]+u(\lambda-u-b(x)v)=0 & \text{in } \Omega,\\ \Delta v+v(\mu+cu-v)=0 & \text{in } \Omega\backslash\bar{\Omega}_0,\\ \partial_n u=0 & \text{on } \partial\Omega,\\ \partial_n v=0 & \text{on } \partial(\Omega\backslash\bar{\Omega}_0).\end{cases}$$

$$U := (1+k\rho(x)v)u \text{ in (SP)} \Rightarrow \text{(EP)}.$$

16

(SP)の解の定義

$$\text{(EP)}\begin{cases}\Delta U+\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}\left(\lambda-\dfrac{U}{1+k\rho(x)v}-b(x)v\right)=0 & \text{in } \Omega,\\ \Delta v+v\left(\mu+\dfrac{cU}{1+kv}-v\right)=0 & \text{in } \Omega\backslash\bar{\Omega}_0,\\ \partial_n U=0 & \text{on } \partial\Omega,\\ \partial_n v=0 & \text{on } \partial(\Omega\backslash\bar{\Omega}_0).\end{cases}$$

定義

(U,v)が(EP)の正値解のとき, $(u,v)=\left(\frac{U}{1+k\rho(x)v},v\right)$を(SP)の正値解であると定義する.

17

正値解の存在定理

定理 1

(i) $\mu \geq 0$の場合.

(SP)に正値解が存在する$\Leftrightarrow \lambda > \lambda^*(\mu, k, \Omega_0)$.

(ii) $\mu < 0$の場合.

$\lambda > -\mu/c$ならば(SP)に正値解が存在する.

閾値

$\lambda^*_\infty(k, \Omega_0) := \lim_{\mu\to\infty} \lambda^*(\mu, k, \Omega_0) \leq \lambda_1^D(\Omega_0)$.

閾値のkとΩ_0に対する依存性

定理 2

(i) $\mu > 0$とする. $\lambda^*(\mu, k, \Omega_0)$は$k$及び$\Omega_0$に関して単調減少である.

(ii) $k > 0$とするとき,

$$\lambda^*_\infty(k, \Omega_0) = \inf_{\{\phi\in H^1(\Omega)\,:\,\int_{\Omega_0}\phi^2dx>0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla\phi|^2dx + \frac{\beta}{k}\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\phi^2dx}{\int_{\Omega_0}\phi^2dx}$$

$$< \frac{\beta|\Omega\setminus\Omega_0|}{k|\Omega_0|}.$$

さらに,

$$\lim_{k\to\infty} k\lambda^*_\infty(k, \Omega_0) = \frac{\beta|\Omega\setminus\Omega_0|}{|\Omega_0|}, \quad \lim_{k\to 0} \lambda^*_\infty(k, \Omega_0) = \lambda_1^D(\Omega_0).$$

定理 2(ii)

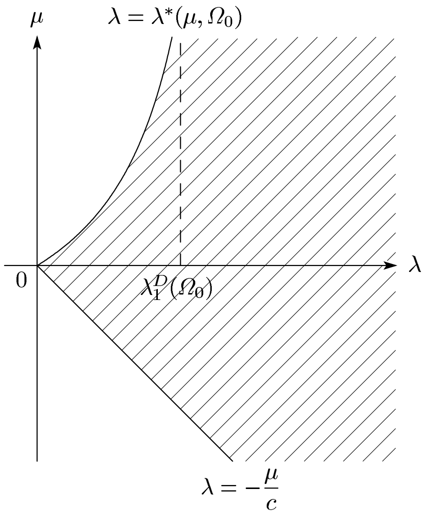
$k > 0$とするとき,

$$\lambda^*_\infty(k, \Omega_0) = \inf_{\{\phi\in H^1(\Omega)\,:\,\int_{\Omega_0}\phi^2dx>0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla\phi|^2dx + \frac{\beta}{k}\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\phi^2dx}{\int_{\Omega_0}\phi^2dx}$$

$$< \frac{\beta|\Omega\setminus\Omega_0|}{k|\Omega_0|}.$$

系

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^*_\infty(k, \Omega_0) = 0, \quad \lim_{\Omega_0\to\Omega} \lambda^*_\infty(k, \Omega_0) = 0 \ \ (k > 0).$$



注意

$k=0$ のとき, $\lim_{\Omega_0\to\Omega}\lambda_1^D(\Omega_0)=\lambda_1^D(\Omega)>0$.

定理 2(ii)

$$\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)=\inf_{\{\phi\in H^1(\Omega):\int_{\Omega_0}\phi^2dx>0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla\phi|^2dx+\frac{\beta}{k}\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\phi^2dx}{\int_{\Omega_0}\phi^2dx}<\frac{\beta|\Omega\setminus\Omega_0|}{k|\Omega_0|}.$$

系

$k>0$ のとき, $\lim_{\Omega_0\to\Omega}\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)=0$.

注意

$k=0$ のとき, $\lim_{\Omega_0\to\Omega}\lambda_1^D(\Omega_0)=\lambda_1^D(\Omega)>0$.

(SP)の正値解の $k\to\infty$ としたときの漸近挙動

$$\begin{cases}\Delta[(1+k\rho(x)v)u]+u(\lambda-u-b(x)v)=0 & \text{in } \Omega,\\ \Delta v+v(\mu+cu-v)=0 & \text{in } \Omega\setminus\bar{\Omega}_0,\\ \partial_n u=0 & \text{on } \partial\Omega,\\ \partial_n v=0 & \text{on } \partial(\Omega\setminus\bar{\Omega}_0).\end{cases}$$

定理 3

$N \leq 3$とし，各kに対して(u_k, v_k)を(SP)の任意の正値解とする.

(i) $\mu > 0$の場合.

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lambda \ \text{ in } C^1(\Omega_0), \qquad \lim_{k\to\infty} u_k = 0 \ \text{ in } C^1(\bar{\Omega}\backslash\Omega_0),$$
$$\lim_{k\to\infty} v_k = \mu \ \text{ in } C^1(\bar{\Omega}\backslash\Omega_0).$$

(ii) $\mu = 0$の場合.

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lambda \ \text{ in } C^1(\Omega_0), \qquad \lim_{k\to\infty} u_k = 0 \ \ (\bar{\Omega}\backslash\Omega_0\text{上一様}),$$
$$\lim_{k\to\infty} v_k = 0 \ \text{ in } C^1(\bar{\Omega}\backslash\Omega_0),$$
$$\lim_{k\to\infty} kv_k = \infty \ \ (\bar{\Omega}\backslash\Omega_0\text{上一様}).$$

定理 3

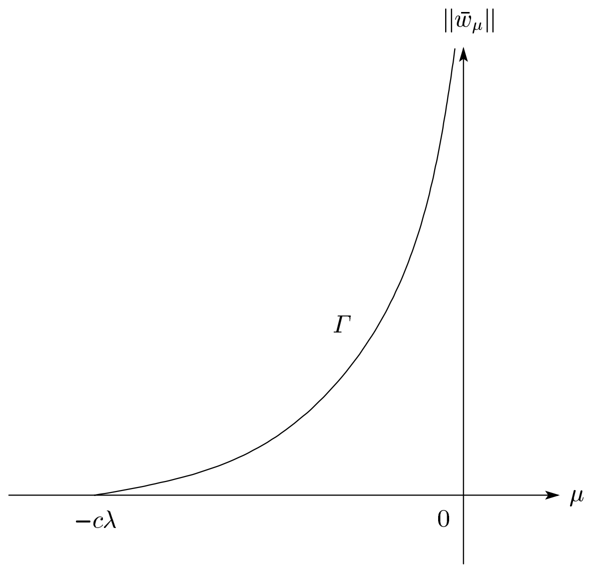
(iii) $\lambda > -\mu/c > 0$の場合.

$\lim_{i\to\infty} k_i = \infty$を満たす任意の数列$\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$に対して，必要ならば部分列をとることにより以下が成り立つ:

$$\lim_{i\to\infty} u_{k_i} = \bar{u} \ \ (\bar{\Omega}\text{上一様}),$$
$$\lim_{i\to\infty} (v_{k_i}, k_i v_{k_i}) = (0, \bar{w}) \ \text{ in } C^1(\bar{\Omega}\backslash\Omega_0)^2,$$

ただし，$(\bar{u}, \bar{w})$は(LP)の正値解である:

$$\text{(LP)} \begin{cases} \Delta[(1+\rho(x)\bar{w})\bar{u}] + \bar{u}(\lambda - \bar{u}) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta\bar{w} + \bar{w}(\mu + c\bar{u}) = 0 & \text{in } \Omega\backslash\bar{\Omega}_0, \\ \partial_n\bar{u} = 0 \ \text{ on } \partial\Omega, \qquad \partial_n\bar{w} = 0 & \text{on } \partial(\Omega\backslash\bar{\Omega}_0). \end{cases}$$



(LP)の正値解の分岐図.

定理 4

$N \leq 3$とする.

非有界連結集合$\Gamma \subset \{(\mu, \bar{u}_\mu, \bar{w}_\mu) : (\bar{u}_\mu, \bar{w}_\mu)$は(LP)の正値解$\}$が存在して以下を満たす:

(i) Γは$\mu = -c\lambda$で半自明解集合$\{(\mu, \lambda, 0) : \mu \in \mathbb{R}\}$から分岐する,

(ii) ある$\tilde{\mu} \in (-\infty, -c\lambda]$に対して

$(-c\lambda, 0) \subset \{\mu : (\mu, \bar{u}_\mu, \bar{w}_\mu) \in \Gamma\} \subset (\tilde{\mu}, 0)$,

(iii) $\lim_{\mu\to 0} \bar{u}_\mu = \lambda$ in $C^1(\Omega_0)$,

$\lim_{\mu\to 0}(\bar{u}_\mu, \bar{w}_\mu) = (0, \infty)$ ($\bar{\Omega}\setminus\Omega_0$上一様),

ただし, $(\mu, \bar{u}_\mu, \bar{w}_\mu) \in \Gamma$.

定理 4

(iii) $\lim_{\mu\to 0} \bar{u}_\mu = \lambda$ in $C^1(\Omega_0)$,

$\lim_{\mu\to 0}(\bar{u}_\mu, \bar{w}_\mu) = (0, \infty)$ ($\bar{\Omega}\setminus\Omega_0$上一様),

ただし, $(\mu, \bar{u}_\mu, \bar{w}_\mu) \in \Gamma$. ($\lim_{i\to\infty} k_i v_{k_i} = \bar{w}$).

定理 3

(ii) $\mu = 0$の場合.

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lambda \text{ in } C^1(\Omega_0), \quad \lim_{k\to\infty} u_k = 0 \ (\bar{\Omega}\setminus\Omega_0\text{上一様}),$$
$$\lim_{k\to\infty} v_k = 0 \text{ in } C^1(\bar{\Omega}\setminus\Omega_0),$$
$$\lim_{k\to\infty} k v_k = \infty \ (\bar{\Omega}\setminus\Omega_0\text{上一様}).$$

(SP)の正値解の$\mu \to \infty$としたときの漸近挙動

$$\begin{cases} \Delta[(1 + k\rho(x)v)u] + u(\lambda - u - b(x)v) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta v + v(\mu + cu - v) = 0 & \text{in } \Omega\setminus\bar{\Omega}_0, \\ \partial_n u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \partial_n v = 0 & \text{on } \partial(\Omega\setminus\bar{\Omega}_0). \end{cases}$$

μ : 捕食者の増殖率.

定理 5

$k>0$とし，各μに対して(u_μ, v_μ)を(SP)の任意の正値解とする.

(i) $\lambda \geq \lambda^*_\infty(k, \Omega_0)$とする.

$$\lim_{\mu\to\infty}(v_\mu - \mu) = 0 \ \ (\bar{\Omega}\backslash\Omega_0\text{上一様}).$$

(ii) $\lambda = \lambda^*_\infty(k, \Omega_0)$の場合.

$$\lim_{\mu\to\infty} u_\mu = 0 \ \ (\bar{\Omega}\text{上一様}).$$

(iii) $\lambda > \lambda^*_\infty(k, \Omega_0)$の場合.

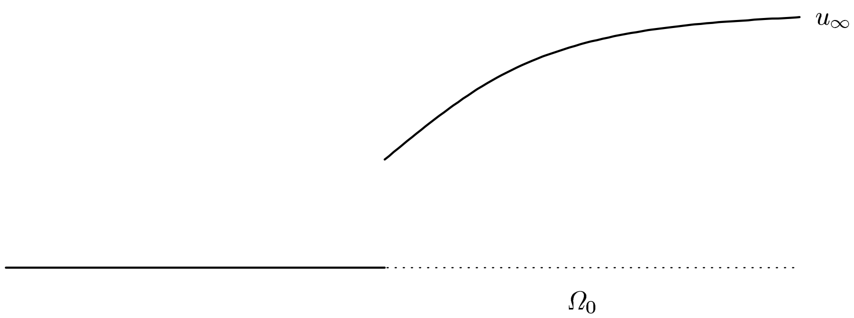
$\lim_{i\to\infty}\mu_i = \infty$を満たす任意の数列$\{\mu_i\}_{i=1}^\infty$に対して，必要ならば部分列をとることで以下が成り立つ:

$$\lim_{i\to\infty} u_{\mu_i} = u_\infty \ \ (\bar{\Omega}\text{上一様}).$$

ただし，u_∞は以下を満たす関数である:

$$u_\infty = 0 \ \text{ in } \bar{\Omega}\backslash\Omega_0, \quad 0 < u_\infty < \lambda \ \text{ in } \Omega_0.$$

30



$$u_\infty = 0 \ \text{ in } \bar{\Omega}\backslash\Omega_0, \quad 0 < u_\infty < \lambda \ \text{ in } \Omega_0.$$

$$\Delta u_\infty + u_\infty(\lambda - u_\infty) = 0 \ \text{ in } \Omega_0.$$

31

補題 1$\left(\lim_{\mu\to\infty}\lambda^*(\mu,k,\Omega_0) \leq \lambda_1^D(\Omega_0)\right)$の証明

$$-\Delta\phi_1 = \lambda_1^D(\Omega_0)\phi_1 \ \text{ in } \Omega_0, \quad \phi_1 = 0 \ \text{ on } \partial\Omega_0, \quad \int_{\Omega_0}\phi_1^2 dx = 1$$

とし，$\tilde{\phi}_1 \in H^1(\Omega)$を以下のように定義する:

$$\tilde{\phi}_1 \equiv \phi_1 \ \text{ in } \Omega_0, \quad \tilde{\phi}_1 \equiv 0 \ \text{ in } \Omega\backslash\Omega_0.$$

このとき，

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_1^N\left(\frac{b(x)\mu - \lambda^*(\mu,k,\Omega_0)}{1+k\rho(x)\mu}, \Omega\right) \\
&= \inf_{\{\phi\in H^1(\Omega)\,:\,\|\phi\|_{L^2(\Omega)}=1\}} \int_\Omega \left(|\nabla\phi|^2 + \frac{b(x)\mu - \lambda^*(\mu,k,\Omega_0)}{1+k\rho(x)\mu}\phi^2\right) dx \\
&\leq \int_{\Omega_0}\left(|\nabla\phi_1|^2 - \lambda^*(\mu,k,\Omega_0)\phi_1^2\right) dx \qquad (\text{上式で}\phi = \tilde{\phi}_1\text{とした}) \\
&= \lambda_1^D(\Omega_0) - \lambda^*(\mu,k,\Omega_0) \quad \text{for } {}^\forall\mu \geq 0.
\end{aligned}$$

よって，$\lim_{\mu\to\infty}\lambda^*(\mu,k,\Omega_0) \leq \lambda_1^D(\Omega_0)$.

32

定理 2(ii)の証明の概略

$$\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)=\inf_{\{\phi\in H^1(\Omega):\int_{\Omega_0}\phi^2dx>0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla\phi|^2dx+\frac{\beta}{k}\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\phi^2dx}{\int_{\Omega_0}\phi^2dx}.$$

$$\begin{cases}-\Delta\phi_\mu+\dfrac{b(x)\mu-\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)}{1+k\rho(x)\mu}\phi_\mu=0 \text{ in } \Omega, & \partial_n\phi_\mu=0 \text{ on } \partial\Omega,\\ \int_\Omega\phi_\mu^2dx=1, \quad \phi_\mu>0 \text{ in } \Omega.\end{cases}$$

1. $\{\phi_\mu\}_{\mu\ge0}$は$H^1(\Omega)$で有界.

なぜなら，両辺にϕ_μを掛けてΩで積分すると，補題 1より

$$\int_\Omega|\nabla\phi_\mu|^2dx=\int_\Omega\frac{\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)-b(x)\mu}{1+k\rho(x)\mu}\phi_\mu^2dx\le\lambda_1^D(\Omega_0).$$

定理 2(ii)の証明の概略

$$\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)=\inf_{\{\phi\in H^1(\Omega):\int_{\Omega_0}\phi^2dx>0\}}\frac{\int_\Omega|\nabla\phi|^2dx+\frac{\beta}{k}\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\phi^2dx}{\int_{\Omega_0}\phi^2dx}.$$

$$\begin{cases}-\Delta\phi_\mu+\dfrac{b(x)\mu-\lambda^*(\mu,k,\Omega_0)}{1+k\rho(x)\mu}\phi_\mu=0 \text{ in } \Omega, & \partial_n\phi_\mu=0 \text{ on } \partial\Omega,\\ \int_\Omega\phi_\mu^2dx=1, \quad \phi_\mu>0 \text{ in } \Omega.\end{cases}$$

1. $\{\phi_\mu\}_{\mu\ge0}$は$H^1(\Omega)$で有界.
2. $\lim_{i\to\infty}\phi_{\mu_i}=\phi_\infty\ge0$ weakly in $H^1(\Omega)$, strongly in $L^2(\Omega)$.
3. $\rho=b=0$ in Ω_0より

$$-\Delta\phi_\infty+\frac{\beta}{k}\chi_{\Omega\setminus\Omega_0}\phi_\infty=\lambda_\infty^*(k,\Omega_0)\chi_{\Omega_0}\phi_\infty \text{ in } \Omega,\quad \partial_n\phi_\infty=0 \text{ on } \partial\Omega.$$

4. 強最大値原理より，$\phi_\infty>0$ in Ω.

Harnack不等式(Lin-Ni-Takagi '88, Lou-Ni '99)

$\max\{N/2,1\}<p\le\infty$に対して$\|f\|_p\le B$とする． $w\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$が

$$\begin{cases}\Delta w+f(x)w=0 \text{ in } \Omega,\\ \partial_n w=0 \text{ on } \partial\Omega\end{cases}$$

の正値解であるとき，ある正定数$C_\#=C_\#(p,N,\Omega,B)$が存在して，

$$\max_{\bar\Omega}w\le C_\#\min_{\bar\Omega}w.$$

定理 3(i)の証明の概略

1. 正値解のa priori評価（正値解のL^2評価＋Harnack不等式）．
2. $\|U_k\|_{C^{1,\theta}(\bar{\Omega})} \le {}^{\exists}C_1\|U_k\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le {}^{\exists}C_2$（$v_k$についても同様）．
3. $\lim_{k\to\infty}(U_k, v_k) = {}^{\exists}(\bar{U}, \bar{v}) \ge (0,0)$ in $C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}\backslash\Omega_0)$.
4. $\bar{v} \ge \mu$ in $\bar{\Omega}\backslash\Omega_0$, $\int_{\Omega\backslash\bar{\Omega}_0} \bar{v}(\mu-\bar{v})dx = 0 \Rightarrow \bar{v} \equiv \mu$ in $\bar{\Omega}\backslash\Omega_0$.
5. $\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} \frac{U_k}{1+kv_k} = 0$ in $C^1(\bar{\Omega}\backslash\Omega_0)$.

$$\text{(EP)}\begin{cases} \Delta U_k + \dfrac{U_k}{1+k\rho(x)v_k}\left(\lambda - \dfrac{U_k}{1+k\rho(x)v_k} - b(x)v_k\right) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \Delta v_k + v_k\left(\mu + \dfrac{cU_k}{1+kv_k} - v_k\right) = 0 \qquad \text{in } \Omega\backslash\bar{\Omega}_0, \\ \partial_n U_k = 0 \ \text{ on } \partial\Omega, \qquad \partial_n v_k = 0 \ \text{ on } \partial(\Omega\backslash\bar{\Omega}_0). \end{cases}$$

36

定理 3(i)の証明の概略

最後に，$\lim_{k\to\infty} u_k = \lambda$ in $C^1(\Omega_0)$を示す．

$u_k = (1+k\rho(x)v_k)u_k = U_k$ in Ω_0, $\lim_{k\to\infty} U_k = \bar{U}$ in $C^1(\bar{\Omega})$

より

$\bar{U} \equiv \lambda$ in Ω_0を示せばよい．そのために

$$\int_{\Omega_0}(\lambda-\bar{U})^2dx = \lambda\int_{\Omega_0}(\lambda-\bar{U})dx - \int_{\Omega_0}\bar{U}(\lambda-\bar{U})dx \le 0$$

を示す．まず，$\int_{\Omega_0}(\lambda-\bar{U})dx \le 0$を示す．

37

定理 3(i)の証明の概略

$$\Delta U_k + \frac{U_k}{1+k\rho(x)v_k}(\lambda - u_k - b(x)v_k) = 0 \ \text{ in } \Omega, \quad \partial_n U_k = 0 \ \text{ on } \partial\Omega$$

より

$$\int_\Omega \frac{\lambda - u_k - b(x)v_k}{1+k\rho(x)v_k}dx = -\int_\Omega \frac{\Delta U_k}{U_k}dx = -\int_\Omega \frac{|\nabla U_k|^2}{U_k^2}dx \le 0.$$

すなわち，

$$\int_{\Omega_0}(\lambda - u_k)dx \le -\int_{\Omega\backslash\Omega_0} \frac{\lambda - u_k - \beta v_k}{1+kv_k}dx.$$

$\lim_{k\to\infty} kv_k = \infty$ ($\bar{\Omega}\backslash\Omega_0$上一様)なので，上式で$k\to\infty$とすると

$$\int_{\Omega_0}(\lambda-\bar{U})dx \le 0.$$

38

定理 3(i) の証明の概略

$$\Delta U_k + u_k(\lambda - u_k - b(x)v_k) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \partial_n U_k = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

より

$$\int_{\Omega_0} u_k(\lambda - u_k)dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_0} u_k(\lambda - u_k - \beta v_k)dx = 0.$$

$\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ in $C^1(\bar{\Omega}\setminus\Omega_0)$ より，上式で $k \to \infty$ とすると

$$\int_{\Omega_0} \bar{U}(\lambda - \bar{U})dx = 0.$$

従って，

$$\int_{\Omega_0} (\lambda - \bar{U})^2 dx = \lambda \int_{\Omega_0} (\lambda - \bar{U})dx - \int_{\Omega_0} \bar{U}(\lambda - \bar{U})dx \le 0.$$

以上より

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} U_k = \bar{U} = \lambda \text{ in } C^1(\Omega_0).$$

参考文献

1. Y. Du, X. Liang, A diffusive competition model with a protection zone, J. Differential Equations 244 (2008) 61–86.

2. Y. Du, R. Peng, M.X. Wang, Effect of a protection zone in the diffusive Leslie predator-prey model, J. Differential Equations 246 (2009) 3932–3956.

3. Y. Du, J. Shi, A diffusive predator-prey model with a protection zone, J. Differential Equations 229 (2006) 63–91.

4. C.S. Lin, W.M. Ni, I. Takagi, Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system, J. Differential Equations 72 (1988) 1–27.

5. Y. Lou, W.M. Ni, Diffusion vs cross-diffusion: An elliptic approach, J. Differential Equations 154 (1999) 157–190.

6. K. Oeda, Effect of cross-diffusion on the stationary problem of a prey-predator model with a protection zone, J. Differential Equations 250 (2011) 3988–4009.

7. N. Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto, Spatial segregation of interacting species, J. Theoret. Biol. 79 (1979) 83–99.