# ロープと杭のゲーム

宮崎大学工学部　辻川　亨

頭の体操やパズルの本を誰もが一度は手にとって見たことがあるでしょう。私もこのての本は何冊か持っています。その中にスローカムとボタマンズ共著のパズルの世界（日経サイエンス社）があります。いくつかの中から ”オクラホマパズル ”を紹介します。

**問題** 36 本の杭が縦、横にそれぞれ 6 本ずつ正方形の形に並んでいるとします。四角形の角の杭からロープですべての杭を結び、最後にはじめの杭の対角線上の反対にある角の杭で終わるとします。ロープはすべての杭を一度しか通れない。また、斜めにロープを張ることもできないとする。このようなことが可能であろうか。話を簡単にするため、出発点を左下、終点を右上の端点とします。

私も含めて皆さんは、まず試行錯誤をしながら紐を動かして杭に掛けてみるでしょう。しかし、なかなかうまくいかない。そこであきらめる人、続けて考える人に分かれます。その中には、もう少し試行錯誤を続ける人、それから問題を簡単な場合に置き換えて見る人もいるでしょう。たとえば 4 本の杭ならどうでしょう。これはできないことが簡単にわかります。初めの杭からは右か上に行くかの二者択一です。そのどちらも次に右上の終点の杭に行かざるをえません。これでは残りの一本の杭にロープを掛けることができません。したがって、すべての杭にロープをかけることは不可能です。それでは杭の数が 9 本ではどうでしょう。この場合、2 つの解が簡単に見つかります。たとえば、いったん右端まで進み上にひとつ上がって、今度は左端まで進み次に１つ上がって右端まで進めはよいのです。もうひとつはお分かりのようにはじめに上の端まで進んで今度はひとつ右に進み次に下の端まで行きもうひとつ右に進んで上の端まで行きそこが終点です。この方法以外にはないようです。可能なやり方が少ないのですべての場合を検討してもたいしたことはありません。縦と横の杭の数が奇数の場合には同じ方法でこのパズルを解くことができます。この場合、可能な方法が何通りあるかは杭の数により変わると思います。
次に問題の定式化をしてみましょう。いま、縦と横の杭の数が $n$ 、合計で $n^2$ 本の杭があるとします。上または下に進む回数を $x$、右または左に進む回数を $y$ とします。すべての杭を一度しか通らないのですから、二つの杭をロープで結ぶ回数は $n^2-1$ です。したがって、

$$x+y=n^2-1$$

となります。また、右に行く回数 $u$ を正、左に行く回数を負の数とすれば、最後は右端に到達しなければならないので

$$u-(x-u)=n-1.$$

同じく、上に行く回数 $v$ を正、下に行く回数を負とすれば、最後に上の端に到達しなければならないので、

$$v-(y-v)=n-1.$$

この3つの式から

$$u+v=\frac{1}{2}(n-1)(n+3)$$

が得られます。$n$ が偶数のとき、左辺は自然数、右辺は自然数ではありませんから、このような自然数 $u, v$ は存在しないことになり、パズルは解けないことになります。しかし、$n$ が奇数の場合には、この式からパズルの解が得られるかどうかはわかりません。実際にあることを示すにはもう少し考察する必要があります。しかし、上で話したように少なくとも2つの解があることは簡単にわかります。

$n$ が奇数の場合に幾通りの解があるかを求めるには途中のロープの結ぶ手順も考える必要があるかもしれません。この点はまだ明確な答えを知りません。

また、説明の方法はいくらでもありますので、皆さんも考えてみてください。

ところで、このように未知数を用いて解く方法は初めにいつ習ったのでしょうか。私の記憶が正しければ、それは鶴亀算だと思います。現在、小学校では何と教えられているのでしょうか。例えば、次の問題を考えてみましょう。

**問題** 鶴と亀の合計は10匹でした。また、足の数は28本です。さて、鶴と亀は何匹ずついるでしょう。

答え方は鶴が $x$ 匹、亀が $y$ 匹いたとします。合計は10ですから、

$$x+y=10$$

となります。また、足の数は鶴が2本、亀が4本ですから

$$2x+4y=28$$

となります。第1式を変形した式 $y=10-x$ を第2式に代入すれば $x=6$ が得られ、$y=4$ となります。答えは鶴が6匹、亀が4匹です。納得できましたか。問題の設定から関係式を求めた時点で、鶴も亀も出てきません。人間とテーブルの足でも良いわけです。数学では、このように問題を抽象化します。解法のプロセスでは対象が何であってもかまわないことになります.

このようなところからも、数学（これは算数ですか）が分からなくなるきっかけができるのかもしれませんね。

さて、もう少し別の説明をしてみましょう。初めに全部が鶴だと仮定してみます。そのとき、足の数は20本です。実際よりも8本足らないわけです。1匹の鶴を亀に置き替えると足の数は2本増えます。8本足らないのですから亀は4匹となり、鶴は6匹となります。これなら納得していただけましたか。

このようにあまり数式を使わずに説明できれば、良いのかもしれないですね。そこで厳密性は犠牲にして、先ほどのパズルの問題をもう一度考え直してみましょう。$n$ が偶数の場合には解がないことを説明してみます。左下の杭から出発して右上の杭に到達すればよ

いわけです。初めの１手は右か上かの二者択一となります。仮に、右に進んだとしても、左端の列に戻らなければならないので、いつかは上に一段上がり、そして左に進みます。最終的には右端に到達する必要がありますからもう一段上に上がらなければなりません。したがって、2回上に上がります。これを上段に行くまで繰り返します。この手順は偶数回になります。途中で下に下がるかも知れませんがすくなくとも元の高さまで戻る必要があります。このときには、上下に進む手順の合計は偶数回です。従って、一番上の段に上がって右に進むには、上に上がる回数から下に下がる回数を引くと偶数になります。このように、段の数 $n$ は奇数でなくてはなりません。杭が6本並んでいたのではできないことになります。厳密性に欠けると思いながら書いていますが、納得していただけたでしょうか。

説明の仕方が不十分であるから分かりにくいといわれると反論のしようがありませんが、いかに数式を使わずに説明することが難しいかは感じていただけましたか。だから、数学は必要であるとは一概にはいえませんが、皆様はどのように思われますか。

また、$n$ が奇数の場合、ロープで杭を結ぶ方法が何通りあるかが気になると思われた方は数学が好きになる素養を持っているかもしれませんね。