応用数学 II 解答

1. (1) $yy' = -x$ より両辺を x について積分する。

$$\int yy'\ dx = \int y\ dy = \frac{y^2}{2} = -\int x\ dx = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C \quad (C \text{ は積分定数である})$$

(2) $y = xv$ とすれば $y' = v + xv'$. $xy' = xv + x^2v' = x + xv$ より $x \neq 0$ のとき $xv' = 1$、すなわち $v' = \dfrac{1}{x}$. $v = \log x + C = \dfrac{y}{x}$. $\quad y = x(\log x + C)$.

2. 解 $u(x,\ t)$ は

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\ exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4t}\right\}\ dv \text{ と表示される。}$$

(1) $s = -\dfrac{x-v}{2\sqrt{t}}$ とすれば

$$\begin{aligned} u(x,\ t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4t}\right\}\ dv = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4t}\right\}\ dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-s^2}\ \frac{dv}{ds}\ ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2}\ ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1. \end{aligned}$$

(2) $s = \dfrac{v + 2t - |x|}{2\sqrt{t}}$ とする。

$$\begin{aligned} u(x,\ t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{-|v| - \frac{(x-v)^2}{4t}\right\}\ dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty exp\left\{\frac{-4tv - x^2 + 2xv - v^2}{4t}\right\}\ dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\ e^{t-|x|} \int_0^\infty exp\left\{-\frac{(v + 2t - |x|)^2}{4t}\right\}\ dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\ e^{t-|x|}\ 2\sqrt{t} \int_0^\infty e^{-s^2}\ ds = e^{t-|x|}. \end{aligned}$$