応用数学 II　No.14　解答

1. (1)　特性方程式は $k^2 - k - 6 = (k-3)(k+2) = 0$ であるから、

一般解は $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$ となる。　$1 = y(0) = C_1 + C_2$.

$y' = 3C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-2x}$ より　$0 = y'(0) = 3C_1 - 2C_2$．したがって，

$$y = \frac{1}{5}(2e^{3x} + 3e^{-2x}).$$

(2)　特性方程式は $k^2 - 6k + 11 = 0$ より $k = 3 \pm \sqrt{2}i$．したがって，

$$y = e^{3x}(C_1 \ \cos\sqrt{2}x + C_2 \ \sin\sqrt{2}x).$$

2. (1)　省略

(2) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)\ dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\ dx = \dfrac{2}{\pi}\left[\pi x - \dfrac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \cos nx\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\ \cos nx\ dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{\pi - x}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\ \sin nx\ dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}(1 - \cos n\pi) \\ &= \frac{2}{n^2\pi}(1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

(3)　$f(x)$ は偶関数であるから，$b_n = 0$.

3. (1)　$\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{3}\ e^{\frac{\pi}{3}i}$

(2)　$c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\ dx = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{4}.$

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ e^{-inx}\ dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x\ e^{-inx}\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{x}{-in}\ e^{-inx}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{in}\ \int_0^{\pi}\ e^{-inx}\ dx\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{-\frac{\pi}{in}\ (-1)^n + \frac{1}{n^2}\left[e^{-inx}\right]_0^{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{in}\ (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n-1}{n^2}\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\pi}{n}\ (-1)^n i + \frac{(-1)^n-1}{n^2}\right\}
$$

4.

$$
A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\ \cos\omega v\ dv = \frac{2}{\pi}\int_0^{1}\ \cos\omega v\ dv = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\omega v}{\omega}\right]_0^1 = \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}
$$

$$
B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\ \sin\omega v\ dv = \frac{2}{\pi}\int_0^{1}\ \sin\omega v\ dv = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos\omega v}{\omega}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}\ \frac{1-\cos\omega}{\omega}
$$

フーリエ余弦積分 $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty}\ \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}\ \cos\omega x\ d\omega.$

フーリエ正弦積分 $f(x) = \displaystyle\int_0^{\infty}\ \frac{2}{\pi}\ \frac{1-\cos\omega}{\pi\omega}\ \sin\omega x\ d\omega.$

5. (1) $\mathscr{F}_c\{f(x)\} = F_c(\omega)$, $\mathscr{F}_s\{f(x)\} = F_s(\omega)$ とする。 $f'(x) = -f(x)$ より

$$
\mathscr{F}_c\{f'(x)\} = -\mathscr{F}_c\{f(x)\} = -F_c(\omega) = \omega F_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}
$$

$$
\mathscr{F}_s\{f'(x)\} = -\mathscr{F}_s\{f(x)\} = -F_s(\omega) = -\omega F_c(\omega)
$$

$-F_c(\omega) = \omega^2 F_c(\omega) - \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ より $(1+\omega^2)F_c(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

$$
F_c(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(1+\omega^2)}, \quad F_s(\omega) = \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{\pi}(1+\omega^2)}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}(f(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-i\omega x}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \int_0^{\infty}\ e^{-x}\ e^{-i\omega x}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \int_0^{\infty}\ e^{-(1+i\omega)x}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \left[-\frac{e^{-(1+i\omega)x}}{1+i\omega}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)} = \frac{1-i\omega}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}
\end{aligned}
$$

6. $\dfrac{d}{dt} = \dot{}$,　$\dfrac{d}{dx} = {}'$ とする。

$\ddot{G}F = G\ddot{F}$ より, $\dfrac{\ddot{G}}{G} = \dfrac{\ddot{F}}{F} = P$ とする。

$\ddot{G} = PG$ より, 特性方程式 $k^2 = P$ から $k = \pm\sqrt{P}$ となる。

$G(t) = C_1\ e^{\sqrt{P}t} + C_2\ e^{-\sqrt{P}t}$.　$G_t = \sqrt{P}\ (C_1\ e^{\sqrt{P}t} - C_2\ e^{-\sqrt{P}t})$ より

$$0 = G_t(0) = \sqrt{P}\ (C_1 - C_2).\quad G(t) = C_1\ (e^{\sqrt{P}t} + e^{-\sqrt{P}t}).$$

有界な解となるために $P < 0$ とする。　$P = -q^2$ とすれば, $C_1 = 1$ として

$$G(t) = \cos qt.$$

次に, $F''(x) = -q^2F(x)$ より $F(x) = C_1\ \cos qx + C_2\ \sin qx$ となる。

$u(0,\ t) = u(\pi,\ t) = 0$ より q が整数のとき, $F(0) = F(\pi) = 0$ から,

$F(x) = C\ \sin qx$ となる。一方, $u(x,\ 0) = f(x) = F(x)G(0) = F(x)$.

フーリエ余弦級数により

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ \sin nx\ dx = \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\pi}\ \sin nx\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\pi}(\pi - x)\ \sin nx\ dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{-\left[\frac{x}{\pi}\ \frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\ dx + \frac{1}{\pi}\left[-(\pi - x)\ \frac{\cos nx}{n}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx\ dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{1}{2n}\ \cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi}[\sin nx]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n}\ \cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2\pi}[\sin nx]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\ \sin\frac{n\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$u(x,\ t) = \frac{4}{\pi^2}\left(\cos t\ \sin x - \frac{1}{9}\cos 3t\ \sin 3x + \frac{1}{25}\cos 5t\ \sin 5x - \cdots\right)$$