応用数学 II No.9 解答

1. (1)

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ e^{-inx}\ dx = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}\ dx = \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{1}{2\pi in}(1-e^{-in\pi}) = \frac{1}{2\pi ni}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 & (n:\text{偶数}) \\ -\dfrac{i}{n\pi} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{i}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1}\ e^{(2m+1)ix}$$

(2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}\ dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{0}^{\pi} = \frac{-1}{2\pi ni}\ (e^{in\pi}-1) = \frac{-1}{2\pi ni}\ ((-1)^n-1)$$

(1) より

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ e^{-inx}\ dx = \frac{1}{\pi ni}\ (1-(-1)^n)$$

$$f(x) = -\frac{2i}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1}\ e^{(2m+1)ix}$$

2. $y = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$ とすると

$y'' = -\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} m^2\ (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$ となる。定数項： $\dfrac{a_0}{2}\omega^2 = 0$ より $a_0 = 0$

$\cos nx$ の項 ： $-n^2 a_n + \omega^2 a_n = 0$ より $a_n = 0$

$\sin nx$ の項 ： $1 \le n \le N$ のとき $-n^2 b_n + \omega^2 b_n = C_n$ より $b_n = \dfrac{C_n}{\omega^2 - n^2}$.

$N < n$ のとき、$-n^2 b_n + \omega^2 b_n = 0$ より $b_n = 0$.

一方, $\cos\omega t$ と $\sin\omega t$ は $y'' + \omega^2 y = 0$ の解である。

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{C_n}{\omega^2 - n^2}\ \sin nt + D_1 \cos\omega t + D_2 \sin\omega t.$$

予備問題：

(1) $z = e^{\frac{3}{4}\pi i} = \cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

(2) $\beta = |z| = \sqrt{1+3} = 2$ より $z = 1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.