

数学の考え方 No.5 解答

1. (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

$$f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} = -4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

したがって、 $a = -1$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 1$ より

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

(2)

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ 3x-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+9x-15 \\ 3x+3x-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x-15 \\ 6x-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

したがって、直線 $y' = \frac{3}{4}x' + \frac{25}{4}$ である。

2. (1)

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ -x+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+\sqrt{3}x-2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x-x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

したがって、直線 $y' = (2 - \sqrt{3})x' + 2(\sqrt{3} - 1)$ である。