

数学の考え方 No.9

< 関数・逆関数 >

1. 関数 $f(x) = (x-1)(5-x)$ ($1 \leq x \leq 5$) について、次の各問に答えよ。

(1) $f(1), f(2), f(3/2), f(3), f(4), f(5)$ を求め、図示せよ。

(2) 関数 $f(x)$ の定義域と値域を求めよ。

(3) 新しい独立変数を t として、 $f(1-t)$ を求め、図示せよ。また、 $f(1-t)$ は $f(x)$ のグラフをどのように移動したか説明せよ。

(4) 区間 $[3, 5]$ で $f(x)$ が単調減少となることを示せ。

(5) (4) の場合について、 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め、図示せよ。

2. 次の値を求めよ。

(1) $\tan^{-1} \sqrt{3}$

(2) $\tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3$

発展問題

1. $\tan \frac{x}{2} = t$ とするとき、つぎの等式が成り立つことを示せ。

$$(1) \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad (2) \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

2. 双曲関数 $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ。

3. 関数 $y = x^3 + 1$ が単調増加であることを示せ。