数学の考え方 No.9 解答

1. (1) $f(1) = 0,\ f(2) = 3,\ f(\frac{3}{2}) = \frac{7}{4},\ f(3) = 4,\ f(4) = 3,\ f(5) = 0.$

(2) $f(x)$ の定義域は閉区間 $[1,\ 5]$ である。

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 = -(x-3)^2 + 4 \leq 4.$$

$x = 3$ は定義域に含まれるので $f(x) \leq 4$. $|x-3|$ が最大になるのは定義域の端点であるから $f(1) = f(5) = 0$. したがって、値域は閉区間 $[0,\ 4]$ である。

(3) $f(1-t) = -t(4+t)$. $f(1-t)$ は $f(x)$ を y 軸に対称に折り返して、t 軸方向に 1 平行移動したものである。

(4) $3 \leq x_1 < x_2 \leq 5$ とする。$x_1 + x_2 > 6$ となるので、

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 6) < 0$$

より $f(x)$ は単調減少である。

(5) $y = f(x) = -x^2 + 6x - 5$ より $x = 3 \pm \sqrt{4-y}$. $x \geq 3$ より $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{4-x}$.

2. (1) $x = \tan^{-1}\sqrt{3}$ とすれば、 $\sqrt{3} = \tan x$. $\tan^{-1} x$ の主値は $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ であるから、$x = \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

(2) $\alpha = \tan^{-1} 2, \beta = \tan^{-1} 3$ とすれば、 $2 = \tan\alpha, 3 = \tan\beta$. $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから、 $0 < \alpha + \beta < \pi$.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -1$$

より、$\tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \alpha + \beta = \dfrac{3}{4}\pi$.

発展問題

1. $1 + \tan^2\dfrac{x}{2} = 1 + \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$.

(1) $\sin x = \sin 2 \times \dfrac{x}{2} = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\dfrac{x}{2} = 2t\dfrac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

(2) $\cos x = \cos 2 \times \dfrac{x}{2} = 2\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}.$

2. $y = \sinh x$ であるから、$e^x = z$ とすれば $z^2 - 2yz - 1 = 0$. したがって、$z = y \pm \sqrt{y^2+1}$. $z > 0$ であるから $z = y + \sqrt{y^2+1}$. ゆえに、$x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ となり、 $\sinh x$ の逆関数は $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

3. $x_1 < x_2$ のとき、

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)\left\{\frac{1}{2}(x_2+x_1)^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_1^2)\right\} \geq 0$$

より、 $y = x^3 + 1$ は単調増加関数である.