

線形代数 No. 3 解答

$$1. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\textcircled{3} + 2 \times \textcircled{1} \\ \textcircled{4} + \textcircled{1}}]{\substack{\textcircled{2} + \textcircled{1}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{4} - 2 \times \textcircled{2}]{\textcircled{3} - \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って、 $\text{rank } A = 2$.

2. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 3 & a \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\textcircled{3} - 4 \times \textcircled{1}}]{\substack{\textcircled{2} - 5 \times \textcircled{1}}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 17 & -17 & a+10 \\ 0 & 11 & -11 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{11} \times \textcircled{3}}]{\substack{\frac{1}{17} \times \textcircled{2}}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{a+10}{17} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{a+10}{17} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\textcircled{3} - \textcircled{2}}]{\substack{\textcircled{1} + 3 \times \textcircled{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 + \frac{3(a+10)}{17} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{a+10}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{a+10}{17} \end{pmatrix}$$

係数行列と拡大係数行列の階数が等しくなるためには $1 - \frac{a+10}{17} = 0$ 、すなわち $a = 7$ である。

(2) (1) より、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので、 $x + z = 1$, $y - z = 1$. $z = t$ とすれば、

$x = 1 - t$, $y = 1 + t$ となる。ここで t は任意定数である。

3. 基本変形により

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{逆行列は } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$