線形代数 No.7 解答

1. (1) $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ とする。$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\in W$ のとき、$a_1+a_2-a_3=0$, $3a_1-a_2+2a_3=0$, $b_1+b_2-b_3=0$, $3b_1-b_2+2b_3=0$ である。 $k\mathbf{a}+\ell\mathbf{b}=(ka_1+\ell b_1,ka_2+\ell b_2,ka_3+\ell b_3)=(c_1,c_2,c_3)$ について、$c_1+c_2-c_3=k(a_1+a_2-a_3)+\ell(b_1+b_2-b_3)=0$, $3c_1-c_2+2c_3=k(3a_1-a_2+2a_3)+\ell(3b_1-b_2+2b_3)=0$ であるから、$k\mathbf{a}+\ell\mathbf{b}\in W$. したがって、$W$ は空間 $\mathbf{R}^3$ 内の部分空間である。

(2) $x+y-z=0$, $3x-y+2z=0$ から $x=-\dfrac{y}{5}=-\dfrac{z}{4}$ は原点を通る直線である。

2. 4つのベクトルが一次独立であるための条件は行列 $(\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4)$ の行列式が 0 とならないことである。

$$|\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4|=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&1&1&1\\1&-1&1&-1\\-1&0&-1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&-1\\-1&-1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

3. $\mathbf{a}\in W$ とすれば、$3x+y-z=1$ となる。$k\mathbf{a}=(kx,ky,kz)$ について、$3kx+ky-kz=k$ より、$k\neq 1$ のとき $k\mathbf{a}\notin W$ である。したがって、集合 W は部分空間でない。

予備問題：

(1) $(x,y,z)=(0,0,0)$ は条件式 $3x+y-z=1$ を満たさないので、$\mathbf{0}\notin W$ から W は部分空間ではない。

(2) W は原点を通る直線 $-2x=\dfrac{4y}{3}=z$ であるから部分空間である。

(3) $\mathbf{a}=(-1,0,0)\in W$ であるが、 $-\mathbf{a}=(1,0,0)$ は $x+y+z\leq 0$ を満たさない。従って、それは W に属さないので W は部分空間ではない。

(4) $\mathbf{a}=(1,0,1)\in W$ であるが、 $2\mathbf{a}=(2,0,2)$ は $x^2+y-z=0$ を満たさない。従って、それは W に属さないので W は部分空間ではない。