

線形代数 No.8 解答

1. (1) $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4)$ の階数 r を求める。基本変形により

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{4} \\ \textcircled{5} - \textcircled{4}}]{\substack{\textcircled{1} - 2 \times \textcircled{4} \\ \textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{4}}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}}]{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\textcircled{4} + \textcircled{2} \\ \textcircled{5} - \textcircled{2}}]{\substack{\textcircled{3} - 2 \times \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \leftrightarrow \textcircled{5}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\textcircled{4} + \textcircled{5}}]{\textcircled{3} \leftrightarrow \textcircled{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} \leftrightarrow \textcircled{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\textcircled{2} + \textcircled{3}}]{\substack{\textcircled{1} - \textcircled{3}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r = 3$ である。

(2) $B = (\mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_2, \ \mathbf{a}_3)$ とすれば (1) と同様にすれば

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より階数は } 3 \text{ である。この } 3 \text{ つのベクトルは } 1 \text{ 次独立である。}$$

(3) $k\mathbf{a}_1 + \ell\mathbf{a}_2 + m\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_4$ とすれば (1) より, 第 2, 4, 5 成分について

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} - \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2} \times \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} - \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} - \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

より $k = 2, \ell = -1, m = -2$ である。

2. $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4)$ とすれば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} - 2 \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4} - \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{4} - \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

階数は 3 より, 1 次独立である。