

線形代数 No.9 解答

1. $x = y - 2z + w$, $x = -2y + z$ より $0 = 3y - 3z + w$, $w = -3y + 3z$,
 $x = -2y + z = y + w$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + z \\ y \\ z \\ -3y + 3z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2つのベクトル $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は1次独立であるので次元は2となる。また、

W はこの2つのベクトルで張られる集合であるから部分空間となる。

2. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}-\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①}, \text{④}-2\times\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{④}-\text{②}]{\text{③}-\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の階数は2より、次元は2であり、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が基底の1つである。

(2)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{①} \leftrightarrow \text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{-1} \times \text{②}]{\text{③}-\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{④}+2\times\text{③}]{\text{①}-\text{②}, \text{③}-\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の階数は 3 より、次元は 3 であり、 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が基底の
1 つである。