

線形代数 No.10

<線形写像とその行列表示>

1. 平面 \mathbb{R}^2 上の点を, 空間 \mathbb{R}^3 内の平面 $x + y + z = 0$ 上の点に移す写像

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ -2x \end{pmatrix}$$

について, 次の各問に答えよ。

- (1) f が線形写像であることを示せ。
- (2) $\mathbf{a}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 1)$ について, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ はそれぞれ \mathbb{R}^2 と \mathbb{R}^3 の基底になることを示せ。
- (3) $f(\mathbf{a}_1)$, $f(\mathbf{a}_2)$ をそれぞれ $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ の1次結合の形で表せ。
- (4) 基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ と $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ に関する線形写像 f の表現行列を求めよ。