

線形代数 No.12 解答

1. E を単位行列, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ または $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする。

$$(1) \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda = -1$ と $\lambda = 5$ が固有値である。

$$\lambda = -1 \text{ のとき, } (A + E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4x + 2y = 0, \text{ すなわち } 2x + y = 0 \text{ より } x = k \text{ とすれば } \mathbf{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = 5 \text{ のとき, } (A - 5E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + 2y = 0, \text{ すなわち } -x + y = 0 \text{ より } x = y = k \text{ とすれば } \mathbf{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned} |B - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 & -7 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 5 & -3 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 + \lambda \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 5 & -3 & -6 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 5 & -3 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & 0 \\ 5 & -3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1 - \lambda)(1 + \lambda)(2 - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

$\lambda = -1, 1, 2$ が固有値である。

$\lambda = -1$ のとき $(A + E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解く。

$$(A + E) = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{1} + 7 \times \textcircled{2} \\ \longrightarrow \\ \textcircled{3} + 5 \times \textcircled{2} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 18 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$18y = 0, -x + 3y + z = 0$ より $-x + z = 0, y = 0$.

$$x = z = k \text{ とすれば } \mathbf{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 1$ のとき,

$$(A - E) = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{1} - 5 \times \textcircled{2} \\ \longrightarrow \\ \textcircled{3} - 5 \times \textcircled{2} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -12 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \textcircled{3} - \textcircled{1} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -12 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-8y - 12z = 0, -x + y + z = 0$ より $x = k$ とすれば $y = 3k, z = -2k$.

$$\mathbf{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 2$ のとき,

$$(A - 2E) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{1} + 4 \times \textcircled{2} \\ \longrightarrow \\ \textcircled{3} + 5 \times \textcircled{2} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$-3y - 3z = 0, -x + z = 0$ より $x = z = k$ とすれば $y = -k$.

$$\mathbf{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$