線形代数 No.13 解答

1. E を単位行列，$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ または $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする。

(1)

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(1-\lambda)(2+\lambda)-4=(\lambda-2)(\lambda+3)=0$$

$\lambda=-3,\ \lambda=2$ が固有値である。

$\lambda=-3$ のとき，

$$(A+3E)\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x+y=0$ より　$x=1,\ y=-2$ とする。

$\lambda=2$ のとき，

$$(A-2E)\mathbf{x}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x+2y=0$ より　$y=1,\ x=2$ とする。

$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば，$P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}AP=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=D$$

$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP=D^n$ より

$$\begin{aligned} A^n=PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (-3)^n+2^{n+2} & -2(-3)^n+2^{n+1} \\ -2(-3)^n+2^{n+1} & 4(-1)^n+2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}|B-\lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)\begin{vmatrix} -1+\lambda & -1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0\end{aligned}$$

$\lambda=1,\ \lambda=2,\ \lambda=3$ が固有値である。

$\lambda=1$ のとき

$$(B-E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-z=0,\ x+y+z=0$ より $x+y=0,\ z=0.\quad \mathbf{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$\lambda=2$ のとき

$$(B-2E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x+z=0,\ 2x+2y+z=0,\quad y=k,\ x=-2k,\ z=2k.\quad \mathbf{x} = k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$\lambda=3$ のとき

$$(B-3E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x+z=0,\ x-y+z=0,\ x+y=0$ より $x=k,\ y=-k,\ z=-2k.$

$$\mathbf{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$ とすれば, $$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = D^n$ より　$A^n = PD^nP^{-1}$

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2^{n+1} & 3^n \\ -1 & 2^n & -3^n \\ 0 & 2^{n+1} & -2\cdot 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^{n+2} - 2\cdot 3^n & -2 + 2^{n+2} - 2\cdot 3^n & 1 - 3^n \\ -2^{n+1} + 2\cdot 3^n & 2 - 2^{n+1} + 2\cdot 3^n & -1 + 3^n \\ -2^{n+2} + 4\cdot 3^n & -2^{n+2} + 4\cdot 3^n & 2\cdot 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$