数学解析　　No. 3 解答

1. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とすれば、$u(x,y) = e^{-x}\sin y,\ v(x,y) = e^{-x}\cos y$ となる。$u_x = -e^{-x}\sin y,\ u_y = e^{-x}\cos y,\ v_x = -e^{-x}\cos y,\ v_y = -e^{-x}\sin y$ より、コーシー・リーマンの方程式 $u_x = v_y,\ v_x = -u_y$ が成り立つ。また、$u_x,\ u_y,\ v_x,\ v_y$ はすべて連続であるから、$f(z)$ はすべての点で微分可能である。

2. オイラーの公式より $z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta = x + iy$ である。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}u_x + \frac{\partial y}{\partial r}u_y = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta,\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}u_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}u_y = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}v_x + \frac{\partial y}{\partial r}v_y = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta,\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}v_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}v_y = -v_x r\sin\theta + v_y r\cos\theta.$$

コーシー・リーマンの方程式から

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta = u_y\sin\theta + u_x\cos\theta = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -u_x\sin\theta - u_y\cos\theta = v_y\sin\theta + v_x\cos\theta = \frac{\partial v}{\partial r}.$$

3. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \overline{z} = x - iy$ より、$u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y$ である。$u_x = 1,\ u_y = 0,\ v_x = 0,\ v_y = -1$ より $u_x \neq v_y$ からコーシー・リーマンの方程式が成り立たないので、微分可能ではない。