

数学解析 No. 4 解答

1. $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とすれば、

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x$$

より、 $u = \cosh y \sin x$, $v = \sinh y \cos x$ となる。

$x = a$ のとき、 $u = \cosh y \sin a$, $v = \sinh y \cos a$ となるので、直線 $x = a$ は双曲線 $\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1$ に写される。

一方、 $y = b$ のとき、 $u = \cosh b \sin x$, $v = \sinh b \cos x$ となるので、直線 $y = b$ は楕円 $\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\sinh^2 b} = 1$ に写される。

2. $z = x + iy$ とする。

(1) $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi \right) \right)$ (n は整数である) より、 $e^x = \sqrt{2}$ 、即ち $x = \frac{1}{2} \log 2$ 。一方、 $y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ より $z = \frac{1}{2} \log 2 + i \left(\frac{1}{4} + 2n \right) \pi$ 。

(2) $\cos z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y = 0$ である。 $\cosh x > 0$ より $\cos y = 0$ 。従って、 $y = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数である)。一方、 $\sinh x \sin y = 0$ を満たすのは $\sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = (-1)^n$ より、 $\sinh x = 0$ なる x である、即ち $x = 0$ 。従って、 $z = i \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$ 。