

数学解析 No.2 解答

1. (1) $z = ax^2 + bx + c$ とすれば、 $y = z^n$ となる。合成関数の微分より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{dy}{dz} = (2ax + b)nz^{n-1} = n(2ax + b)(ax^2 + bx + c)^{n-1}$$

(2) $t = \sqrt{3x^2 + 2}$, $z = 3x^2 + 2$ とすれば、 $t = z^{\frac{1}{2}}$ となる。
 $\frac{d}{dx} \sqrt{3x^2 + 2} = \frac{dz}{dx} \frac{dt}{dz} = 6x \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 2}}$ より $\frac{dy}{dx} = -\frac{6x}{(3x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}}$.

(3) $t = \sin \frac{1}{x}$, $z = \frac{1}{x}$ とすれば、 $t = \sin z$ となる。
 $\frac{d}{dx} \sin \frac{1}{x} = \frac{dz}{dx} \frac{dt}{dz} \sin z = -\frac{1}{x^2} \cos z = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$ より $\frac{dy}{dx} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

2. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \frac{bx}{\sin bx} \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

(2) $y = \tan^{-1} x$ とすれば、 $x = \tan y$ となる。 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$ より、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cos y = 1$$