数学解析 I No. 3 解答

1.

(1) $y' = 5e^{-3x} + 5x(-3)e^{-3x} = (5-15x)e^{-3x} = 5(1-3x)e^{-3x}.$

(2) $z = \log x$ とするとき、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log z = \frac{d}{dz}\log z \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\log x} = \frac{1}{x\log x}.$$

(3)

$$y = \log\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \frac{1}{2}\log\frac{x-a}{x+a} = \frac{1}{2}\left\{\log(x-a) - \log(x+a)\right\}$$

より、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right\} = \frac{2a}{2(x-a)(x+a)} = \frac{a}{(x-a)(x+a)}.$$

(4) $z = \sin x$ とすれば、$y = \log|z|$ となる。

$$y' = \frac{d}{dz}\log|z|\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z}\cos x = \frac{1}{\tan x}.$$

2. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$ と $y = x\log a$ より、

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log a} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\log a\frac{e^{x\log a} - 1}{x\log a} = \log a\lim_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{y} = \log a.$$

3.

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n^4} < 1 \quad \text{から} \quad 1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n < \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}}\right)^n$$

一方、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$ から、はさみ打ち法により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$