数学解析 I No. 4 解答

1.
(1) $u = \cos 3x$ とするとき、 $y = u^2$ 　であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du^2}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{du^2}{du} = -3\sin 3x \cdot 2\cos 3x = -3\sin 6x.$$

(2) $y' = \sin^{-1} x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $u = \dfrac{1+x}{1-x}$ とするとき、 $y = \tan^{-1} u$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{d}{du}\tan^{-1} u = \frac{2}{(1-x)^2}\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. (1) $\log y = \log x^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x}\log x$ から

$$\frac{d}{dx}\log y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\log x + \frac{1}{x^2}.$$

従って,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}(1-\log x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1-\log x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x).$$

(2) $\log y = \sin x \log x$ より、

$$\frac{d}{dx}\log y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos x \log x + \sin x \frac{1}{x}$$

より、$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \log x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$