数学解析 I No. 5 解答

1.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+4}{x+1}=\frac{5}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{7x^4+6x+5}{5x^4+3x^3+4x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{6}{x^3}+\frac{5}{x^4}}{5+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{7}{5}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(x-\frac{\pi}{2})}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\sin x}=2$

(5) $y=(-\log x)^x$ とするとき、 $\log y=x\log(-\log x)$ より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\log y &= \lim_{x\to+0}x\log(-\log x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log(-\log x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x\log x}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &=\lim_{x\to+0}\frac{-x}{\log x}=0.\end{aligned}$$

$\log y=0$ であるから $y=1$. したがって、 $\displaystyle\lim_{x\to+0}(-\log x)^x=1.$

追加問題：

1. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0$

(3) $(a^{\frac{1}{x}})'=-\frac{a^{\frac{1}{x}}\log a}{x^2}$ より、

$$\lim_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{a^{\frac{1}{x}}\log a}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\log a\lim_{x\to\infty}a^{\frac{1}{x}}=\log a$$

2.

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} &= (x^4 e^x)^{(n)} \\
&= {}_nC_0 x^4 (e^x)^{(n)} + {}_nC_1 4x^3 (e^x)^{(n-1)} + {}_nC_2 12x^2 (e^x)^{(n-2)} + {}_nC_3 24x (e^x)^{(n-3)} + {}_nC_4 24 (e^x)^{(n-4)} \\
&= e^x \left\{ x^4 + 4nx^3 + 6n(n-1)x^2 + 4n(n-1)(n-2)x + n(n-1)(n-2)(n-3) \right\}
\end{aligned}
$$