

## Analysis II No. 1 Solution

1. (1) 曲座標表示  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  より、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0.$$

$f(0,0) = 0$  であるから、 $f(x,y)$  は原点で連続である。

(2) 例えば、 $y = x$  のとき、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{|x|}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0.$$

一方、 $y = -x$  のとき、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} e^0 = 1.$$

従って  $f(x,y)$  は原点で不連続となる。

(3) 曲座標表示  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  とロピタルの定理から、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} 2 \sin \theta \cos \theta r^2 \log r = \sin 2\theta \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log r}{\frac{1}{r^2}} = \sin 2\theta \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-r^2}{2} = 0.$$

$f(0,0) = 0$  より、 $f(x,y)$  は原点で連続である。