

数学解析 II No. 10 解答

1. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とする。

(1) 領域 D は $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ と表示できる。

$$\iint_D \log(x^2 + y^2) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \log r^2 \, d\theta dr = 2\pi \int_0^1 2r \log r \, dr = -\pi$$

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. また、 $a < y < b$ より $\frac{a}{\sin \theta} \leq r \leq \frac{b}{\sin \theta}$. 従って、

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{a}{\sin \theta}}^{\frac{b}{\sin \theta}} \frac{r \cos \theta}{r^3} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\log r \right]_{\frac{a}{\sin \theta}}^{\frac{b}{\sin \theta}} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\log \frac{b}{\sin \theta} - \log \frac{a}{\sin \theta} \right) \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{b}{a} \cos \theta d\theta \\ &= \log \frac{b}{a} \left[\sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \log \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

2. $x + y = u$ と $\frac{x}{y} = v$ より、 $0 < u < 1$ と $0 < v < 1$.

$$|J| = |x_u y_v - x_v y_u| = \left| \frac{v}{1+v} \frac{-u}{(1+v)^2} - \frac{u}{(1+v)^2} \frac{1}{1+v} \right| = \frac{u+uv}{(1+v)^3}$$

より、

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x(x+y)^3}{y^3} dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{v(uv+u)^4}{u^2(1+v)^4} dudv = \int_0^1 \int_0^1 vu^2 dudv = \int_0^1 v \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 dv \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$