

数学解析 II No. 12

＜重積分のまとめ＞

1. 次の重積分の値を求めよ。

(1) $\int_{-3}^2 \int_0^1 x^2 y \, dx \, dy$

(2) $\int_0^1 \int_{y^2}^y y \, dx \, dy$

2. 領域 D について、次の重積分の値を求めよ。

(1) $\int \int_D x \, dx \, dy, \quad D; 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x$

(2) $\int \int_D \sqrt{1-x^2} \, dx \, dy, \quad D; x^2 + y^2 \leq 1, x > 0, y > 0$

(3) $\int \int_D \frac{1}{x^2 + y^2} \, dx \, dy, \quad D; 0 < x \leq x^2 + y^2 \leq 2x$

3. 積分の順序を交換して、次の重積分の値を求めよ。また、積分領域を図示せよ。

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sin \frac{\pi x}{\sqrt{y}} \, dy \, dx$$

4. 領域 $x^2 + y^2 \leq 1, x > 0, y > 0$ の内部にある曲面 $z = xy$ の部分の曲面積を求めよ。

解答

1. (1) $-\frac{5}{6}$ (2) $\frac{1}{12}$

2. (1) π (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\pi \log 2$

3. $\frac{2}{3\pi}$

4. $\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2} - 1)$