

Analysis II No. 1 解答

1. (1) 極座標表示 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ より、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0.$$

$f(0,0) = 0$ であるから、 $f(x,y)$ は原点で連続である。

(2) 例えば、 $y = x$ のとき、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{|x|}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{|x|}} = 0.$$

一方、 $y = -x$ のとき、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} e^0 = 1.$$

従って $f(x,y)$ は原点で不連続となる。

(3) 極座標表示 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とロピタルの定理から、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} 2 \sin \theta \cos \theta r^2 \log r = \sin 2\theta \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log r}{\frac{1}{r^2}} = \sin 2\theta \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-r^2}{2} = 0.$$

$f(0,0) = 0$ より、 $f(x,y)$ は原点で連続である。

2. (1) 極座標表示により $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} r(\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta) = 0$ であるから、極限は存在する。

(2) $y = x^2$ のとき $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}$. 一方 $y = -x^2$ のとき、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = -\frac{1}{2}$ であるから、極限は存在しない。