

Analysis II No. 6 解答

1.(1) $z_x = 2x + y - 4$, $z_y = x + 2y - 2$, $z_{xx} = 2$, $z_{xy} = 1$, $z_{yy} = 2$. $z_x = 2x + y - 4 = 0$ と $z_y = x + 2y - 2 = 0$ から、 $(x, y) = (2, 0)$. $f_{xx}(2, 0)f_{yy}(2, 0) - f_{xy}(2, 0)^2 = 3 > 0$, $z_{xx} = 2$ から $(2, 0)$ で極小となり、極小値は -4 である。

(2) $z_x = 3x^2 - 3ay$, $z_y = 3y^2 - 3ax$, $z_{xx} = 6x$, $z_{xy} = -3a$, $z_{yy} = 6y$. $z_x = 3(x^2 - ay) = 0$ と $z_y = 3(y^2 - ax) = 0$ より、 $(x, y) = (a, a)$ と $(0, 0)$ は極値の候補である。 $f_{xx}(a, a)f_{yy}(a, a) - f_{xy}^2(a, a) = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0$ より、 (a, a) は $a < 0$ のとき極大、 $a > 0$ のとき極小となり、極値はともに $-a^3$ である。

また、 $f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = -9a^2 < 0$ より、 $(0, 0)$ では極値とならない。

予備問題: 直方体の体積を k とする。各辺の長さを x, y, z とすれば $xyz = k > 0$ となる。したがって、表面積は $f(x, y) = 2\left(xy + \frac{k}{x} + \frac{k}{y}\right)$ である。 $f_x = 2\left(y - \frac{k}{x^2}\right)$, $f_y = 2\left(x - \frac{k}{y^2}\right)$, $f_{xx} = \frac{4k}{x^3}$, $f_{xy} = 2$, $f_{yy} = \frac{4k}{y^3}$ となる。このとき、極値の候補は $(x, y) = (k^{\frac{1}{3}}, k^{\frac{1}{3}})$ である。 $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = -12 < 0$ と $f_{xx} = 4$ より、 $(x, y) = (k^{\frac{1}{3}}, k^{\frac{1}{3}})$ で極小となる。したがって、表面積が最小となるものは立方体にかぎる。