

平成21年度 数学解析 II 中間試験解答

1. (1) $x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$ とする。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4(\cos^4 \theta - \sin^4 \theta)}{r^2} = (\cos^4 \theta - \sin^4 \theta) \lim_{r \rightarrow 0} r^2 = 0 = f(0,0)$$

より, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である。

(2) $y = mx$ とする。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

$m = 0$ とすれば $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \neq \frac{1}{2} = f(0,0)$ より $(0,0)$ で連続ではない。

2. (1) $z_x = 12x^2y - 12xy^4, \quad z_y = 4x^3 - 24x^2y^3$

$$(2) \quad z_x = \frac{2x}{x^2 - y}, \quad z_y = -\frac{1}{x^2 - y}$$

$$(3) \quad z_x = e^x \cos^2 y - 2e^y \sin x \cos x, \quad z_y = -2e^x \sin y \cos y - e^y \sin^2 x$$

3. $z_x = 2x, \quad z_y = 2y$ より $z_x(2,1) = 4, \quad z_y(2,1) = 2$.

$z - 5 = 4(x - 2) + 2(y - 1)$ より, 接平面の式は $z = 4x + 2y - 5$.

$$4. \quad z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = -3x + 3y^2, \quad z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = -3, \quad z_{yy} = 6y.$$

$z_x = 0$ と $z_y = 0$ より $y = x^2 = y^4$ または $y(1 - y^3) = 0$.

$(x,y) = (0,0)$ と $(1,1)$ が極値の候補である。

$(x,y) = (0,0)$ のとき

$$\Delta = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = -9 < 0 \text{ より, 極値ではない。}$$

$(x,y) = (1,1)$ のとき

$\Delta = 27 > 0$ と $z_{xx} = 6 > 0$ より, 極小となる。極小値は -1 である。

5. ラグランジュの未定係数法により

$$z = f(x, y) = x^3 + y^3, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \text{ とすれば,}$$

$$f_x + \lambda g_x = 3x^2 + 2\lambda x = x(3x + 2\lambda) = 0, \quad f_y + \lambda g_y = 3y^2 + 2\lambda y = y(3y + 2\lambda) = 0$$

$$x = y = 0. \text{ また } x = y = -\frac{2}{3}\lambda \text{ のとき, } \frac{4}{9}\lambda^2 + \frac{4}{9}\lambda^2 - 1 = 0 \text{ より } \lambda = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ で}$$

あり $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. ただし、 $g_y(0, 0) = 0$ より $(0, 0)$ は極値でない。

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ のとき, } z = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ となり最大,}$$

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ のとき, } z = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より最小となる。}$$

$$6. \quad y' = e^y + xy'e^y \text{ すなわち } (1 - xe^y)y' = e^y \text{ より } y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}.$$

$$y'' = 2y'e^y + xy''e^y + xy'^2e^y \text{ から,}$$

$$(1 - xe^y)y'' = 2y'e^y + xy'^2e^y = \frac{2e^{2y}}{1 - xe^y} + \frac{xe^{3y}}{(1 - xe^y)^2}.$$

$$\text{したがって, } y'' = \frac{2(1 - xe^y)e^{2y} + xe^{3y}}{(1 - xe^y)^3}.$$

$$7. \quad f_x = \frac{y}{1 + xy}, \quad f_y = \frac{x}{1 + xy}, \quad f_{xx} = -\frac{y^2}{(1 + xy)^2}, \quad f_{xy} = \frac{(1 + xy) - xy}{(1 + xy)^2} = \frac{1}{(1 + xy)^2}$$

$$f_{yy} = -\frac{x^2}{(1 + xy)^2} \text{ より}$$

$$\log(1 + xy) \doteq xy.$$