数学解析　・中間試験

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問４が２点、その他の小問を１点として合計 12 点とする。

問１．次の各問に答えよ。

(1) $\cos\left(2\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\right)$ の値を求めよ。$\dfrac{1}{9}$

(2) $\sin^{-1}\dfrac{3}{5}+\sin^{-1}\dfrac{4}{5}$ の値を求めよ。$\dfrac{\pi}{2}$

問２．　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(1+x)}{x^2}\right\}=-\frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=1$

問３．次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

(2) $y=e^{-x^2}\cos x$

$y'=-e^{-x^2}(2x\cos x+\sin x)$

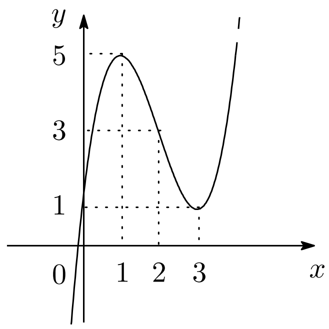
(3) $y = \sin^{-1}(2x^2)$
$y' = \dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}$

問４． 関数 $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ について、関数の増減表を用いて極値及び凸性を示し関数の概形を描け。

$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$, $f''(x) = 6(x-2)$ から、$x = 1,\ 3$ が極値の候補である。$f''(1) = -6 < 0$, $f''(3) = 6 > 0$ より、$x = 1$ で極大となり、極大値は 5 である。また、$x = 3$ で極小値なり、極小値は 3 である。また、$x = 0$ のとき、$y = 1$ となる。変曲点は $x = 2$ である。

x	$-\infty$		1		2		3		∞
f'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞
			極大		変曲点		極小		

$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$



問５．次の各問に答えよ。

(1) 平均値の定理を書け。

微分可能な関数 $y = f(x)$ について、$a < b$ となるとき、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

をみたす c $(a < c < b)$ が少なくとも 1 つ存在する。

(2) (1) を用いて、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \quad (x > 0)$$

$f(x) = x - \log(1+x)$ とするとき、$x > 0$ に対して $f'(x) = \dfrac{x}{1+x} > 0$ となる。$f(0) = 0$ と平均値の定理から

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c) > 0, \quad (c > 0)$$

となる。したがって、$f(x) > 0$ より不等式が成り立つ。

一方、$g(x) = \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$ とすれば、$x > 0$ に対して、$g'(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2} > 0$ となるので $g(0) = 0$ を用いて同様に不等式が証明できる。