初等関数

2005/05/05 by 矢崎

目 次

注.

問題 (A): これだけは！（初級）
問題 (B): 脳みそに汗が；（中級）
問題 (C): むむ、御主只者でないの。（上級）

1.　関数 I

定数 一定の値を表す数。通常、$a, b, c, \ldots$.

変数 定数でない数。通常、$x, y, z, \ldots$.

関数 (function) 2 つの集合に間にある対応する規則。　かつて函数と書いた。

y は x の関数 変数 x を決めると、それに対応して変数 y の値が定まるような規則。通常、

$$y = f(x)$$

などとかく。x を**独立変数**、y を**従属変数**という。

例. 等速度 a (m/sec) で運動している物体が t 秒間に進む距離を x (m) とすると、$x = at$ という関係式が成り立つ。a は定数、t は独立変数、x は従属変数である。x は t の関数であるから $f(t) = at$ とおいて、$x = f(t)$ と書ける。文字の倹約で、$x = x(t)$ と書くこともある。この場合、左辺の x は従属変数、右辺 $x(t)$ の x は関数の意味となる。

例. 理想気体の状態方程式 $PV = nRT$ において、温度 T が一定の状態の下では、圧力 P を独立変数とみれば、体積 V は P の関数となり、体積 V を独立変数とみれば、圧力 P は V の関数となる。どちらも独立変数になり得る。

関数の定義域 (**d**omain) 独立変数 x の取り得る値の範囲。通常、

$$D, I$$

区間 interval

などと表す。

例. $f(x) = \sqrt{x}$ の定義域は $[0, \infty)$.

注. 区間の記号について。
$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$: **開区間**
$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$: **半開区間**　詳しくは、右半開区間
$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$: **半開区間**　詳しくは、左半開区間
$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$: **閉区間**

関数の値域 (**r**ange) $y = f(x)$ において、独立変数 x が定義域の中をくまなく動いたときの、従属変数 y の取り得る値の範囲。通常、

$$R,\ f(D),\ f(I)$$

$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$.

などと表す。

例. 関数 $f(x) = \sin x$ の定義域は $I = \mathbb{R}$, 値域は $f(I) = [-1, 1]$.　$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

問題 1. (A) 知っている関数の定義域と値域を確認せよ。

2. 関数 II

1 価関数 x を決めると y の値が一つ定まる関数。

通常、関数といえば 1 価関数を指す。

例. $y = x^2$.

多価関数 x を決めると y の値が複数（有限個）定まる関数。

例. $x = y^2$. $x = 1$ ならば、$y = \pm 1$. 値が 2 つ定まるので 2 価関数。

無限多価関数 x を決めると y の値が無数に定まる関数。

例. $x = \sin y$. $x = 0$ ならば、$y = m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

単調関数 関数 f の定義域に属する x_1, x_2 について、

f: **単調増加** $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ ならば、$f(x_1) < f(x_2)$　　もしくは、**狭義の単調増加**

f: **単調減少** $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ ならば、$f(x_1) > f(x_2)$　　もしくは、**狭義の単調減少**

f: **単調** $\Leftrightarrow$ f は単調増加か単調減少

f: **広義の単調増加** $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ ならば、$f(x_1) \leq f(x_2)$　　もしくは、**単調非減少**

f: **広義の単調減少** $\Leftrightarrow$ $x_1 < x_2$ ならば、$f(x_1) \geq f(x_2)$　　もしくは、**単調非増加**

例. $f(x) = x^2$ は、$[0, \infty)$ で単調増加、$(-\infty, 0]$ で単調増加。

例. 記号 $[x]$ で x を超えない最大の整数を表すことにする（Gauss 記号）。例えば、$[\pi] = 3$, $[10] = 10$, $[0.4] = 0$, $[-0.1] = -1$. このとき関数 $f(x) = [x]$ は $(-\infty, \infty)$ で広義の単調増加である。

$x > 0$ ならば $[x]$ は x の整数部分に等しい。

問題 2. (A) 単調な関数の例を 3 つ挙げよ。

3. 関数 III

逆関数 I を f の定義域とする。任意の $y \in f(I)$ に対して、$f(x) = y$ となる $x \in I$ がただ一つ存在するとき、対応 $y \longmapsto x$ を x の**逆関数**といい、

f の値域は $f(I)$.

$$\boldsymbol{f^{-1}}$$

と表す：$x = f^{-1}(y)$.

注. 逆関数と逆数は違う!! $f(x)^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$ は $f(x)$ の逆数。

y と x を入れ替えるとわかりやすい：

$$y = f^{-1}(x).$$

f^{-1} の定義域は $f(I)$, 値域は I である。

注. $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、$y = f(x)$ を $y = x$ を軸として対称に折り返したグラフである。

注. 単調な関数は逆関数を持つ。

例. $y = f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は、$x = ay + b$ を y について解いて、$y = f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$.

例. 上の例で、$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ である。実際、

$$f(f^{-1}(x)) = af^{-1}(x) + b = a\frac{x-b}{a} + b = x$$
$$f^{-1}(f(x)) = \frac{f(x)-b}{a} = \frac{ax+b-b}{a} = x$$

これは一般に成り立つ。

定義から当たり前！

問題 3. (A) 単調な関数 $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ の例を挙げよ。また、$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ を確認せよ。

4. 1 次関数

解析学で最も基本的な関数は

$$y = ax + b \quad (a, b\text{: 定数、} a \neq 0)$$

で、これを **1 次関数**という。グラフは直線 straight line である。y 軸上の点 $y = b$ を ***y* 切片**、x 軸上の点 $x = -b/a$ を ***x* 切片**と呼ぶ。x の**係数** a はグラフの**傾き**を表し、b を**定数項**と呼ぶ。$a = 0$ のとき、

1 次＝線型（線形）＝リニア linear

$$y = b$$

となるが、これを**定数関数（0 次関数）**という。1 次関数と定数関数で平面内のあらゆる直線を表すことができる。ただし、

y 軸は $x = 0$,　y 軸に平行な直線は $x =$ 定数

という形になる。

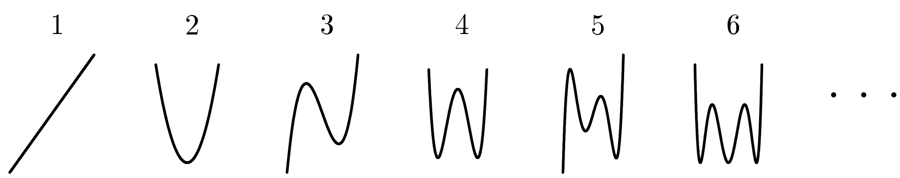
2 次関数 $y = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c\text{: 定数、} a \neq 0)$

3 次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d\text{: 定数、} a \neq 0)$

$\vdots$

***n* 次関数** $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_0, \ldots, a_n\text{: 定数、} a_n \neq 0)$

1 次関数から 6 次関数までの代表的なグラフの形状は以下のようである。山と谷が交互に一つずつ増えていくのがわかるであろう。



注. 次数を特に問わないとき、**多項式関数**という。

問題 4. (A) 以下の各関数のグラフを代表的な点や切片と共に図示せよ。

(1) x 軸、及び y 軸に平行な直線をそれぞれ 3 本ずつ描き、それぞれの式を書け（計 6 つ）。

(2) 3 つの 2 次関数 $y = x^2$, $y = 0.1x^2$, $y = 0.01x^2$ を描け。

(3) 3 つの 2 次関数 $y = x^2$, $y = 10x^2$, $y = 100x^2$ を描け。

(4) 3 つの 2 次関数 $y = x^2$, $y = (x-2)^2$, $y = (x+1)^2$ を描け。

(5) 3 つの 2 次関数 $y = x^2$, $y = (x-2)^2 + 3$, $y = (x+1)^2 - 1$ を描け。

(6) 3 つの 3 次関数 $y = x^3$, $y = x(x^2 - 1)$, $y = (x-1)(x-3)(x+2)$ を描け。

問題 5. (A) 以下の各関数のグラフを代表的な点や切片と共に図示せよ。

(1) 原点を通る 1 次関数の一般式を書き、その典型的なグラフを図示せよ。

(2) 原点を通る 2 次関数の一般式を書き、その典型的なグラフを図示せよ。

(3) 原点を通る 3 次関数の一般式を書き、その典型的なグラフを図示せよ。

5.　有理関数（特に、1 次分数関数）

$f(x)$ と $g(x)$ を多項式関数としたとき、その分数関数

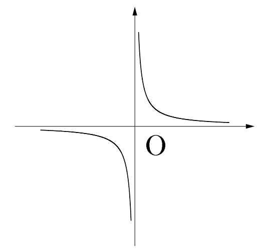
f, g が共に 1 次関数のとき、これを **1 次分数関数**と呼ぶ

$$y = \frac{g(x)}{f(x)}$$

を**有理関数**と呼ぶ。典型的な例は、反比例の関数

$$y = \frac{1}{x}$$

であろう。これは x 軸、y 軸を漸近線とする**双曲線**を表す。



問題 6. (A) $a = \frac{1}{2}, 1, 2$ に対し、$y = \frac{a}{x}$ を描け。また、$a = -\frac{1}{2}, -1, -2$ に対し、$y = \frac{a}{x}$ を描け。

問題 7. (B) $a > 0$ のとき、双曲線 $y = \frac{a}{x}$ は、

$y = \frac{1}{x}$ を、原点を相似の中心として $\sqrt{a}$ 倍に拡大

したものである。なぜか。

問題 8. (A) $y = \frac{2}{x-1}$ を描け。一般に、$y = \frac{a}{x-p}$ は、 (a, p は定数、$a \neq 0$)

$y = \frac{a}{x}$ を ____ 軸方向に ____ 平行移動したものである。

問題 9. (A) $y = \frac{2}{x} + 1$ を描け。一般に、$y = \frac{a}{x} + q$ は、 (a, q は定数、$a \neq 0$)

$y = \frac{a}{x}$ を ____ 軸方向に ____ 平行移動したものである。

問題 10. (A) $y = \frac{2}{x-3} - 1$ を描け。一般に、$y = \frac{a}{x-p} + q$ は、 (a, p, q は定数、$a \neq 0$)

$y = \frac{a}{x}$ を ____ 軸方向に ____ 平行移動し、
かつ ____ 軸方向に ____ 平行移動したものである。

例. 1 次分数関数 $y = \frac{2x+1}{x-1}$ は、

$$\frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

と変形できるので、問題 10. に帰着できる。

問題 11. (A) $y = \frac{2x-1}{x-2}$ を描け。一般に、$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ は、$ad - bc \neq 0$ のとき、 (a, b, c, d は定数、$c \neq 0$)

$y = \frac{\square}{x}$ を ____ 軸方向に ____ 平行移動し、
かつ ____ 軸方向に ____ 平行移動したものである。

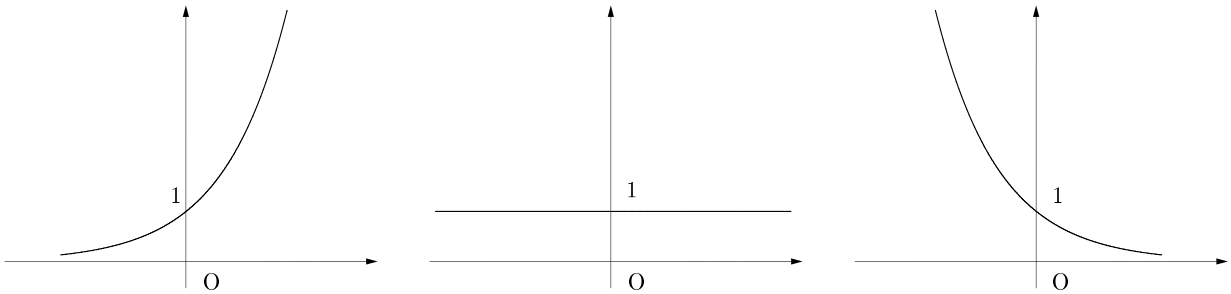
$\square$ も求めよ。

6.　指数関数

　指数関数 $y = a^x$ $(a > 0)$ を **a と底とする指数関数**という。a^x の定義は、等比数列 a^n $(n = 1, 2, \ldots)$ からはじまり、次のように順次定義を拡張していくことによりなされる。

$$a^{\square}:\quad \square = \text{自然数} \to \text{整数} \to \text{有理数} \to \text{実数}$$

　$y = a^x$ のグラフを見てみよう。左から、$a > 1$, $a = 1$, $0 < a < 1$ のときの $y = a^x$ のグラフである。



　真ん中のグラフは $y = 1^x = 1$ であるので、定数関数である。よって、今後は $a > 1$ か $0 < a < 1$ の場合のみ考える。

指数法則. $a > 0, b > 0$ とする。このとき次の法則が成り立つ：
$$\begin{cases} a^x \times a^y = a^{x+y} \\ a^x / a^y = a^{x-y} \\ (a^x)^y = a^{xy} \\ (ab)^x = a^x b^x \\ (a/b)^x = a^x / b^x \end{cases}$$

　したがって、左右のグラフにおいて、$b = \dfrac{1}{a}$ とおいて、

$$y = a^x = \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{b^x} = b^{-x}$$

と考えてもよい。

問題 12. (A) $y = e^x$ と $y = e^{-x}$ を同一座標平面上に描け。

問題 13. (A) (1) $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$ を同一座標平面上に描け。
(2) $y = 2^{-x}$, $y = 3^{-x}$, $y = 4^{-x}$ を同一座標平面上に描け。

問題 14. (A) $a^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{a}\,)^n = \sqrt[m]{a^n}$ に注意して、次の各式を簡単にせよ。

$$(1)\ \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a^3} \quad (2)\ \sqrt[3]{a^2 b^4} \times \sqrt[4]{a^2 b}\ /\ \sqrt{ab^3} \quad (3)\ \left(\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right)^6$$

問題 15. (A) 電卓などで、2^3, $2^{3.1}$, $2^{3.14}$, $2^{3.141}$, $2^{3.1415}$ の値を計算せよ。また、2^π の値と比較せよ。

問題 16. (A) 次の各指数方程式を解け。

$$(1)\ 4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \quad (2)\ 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \quad (3)\ 4^{x+1} + 2^{x+1} - 2 = 0$$

7. 対数関数

指数関数 $y = a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$ は単調である故、逆関数をもつ。つまり、

$$x = a^y \quad (a \neq 1, a > 0)$$

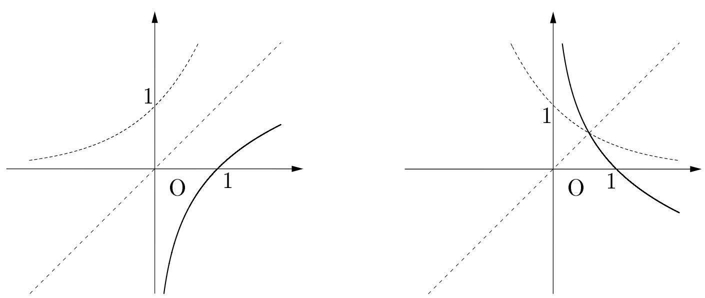
を満たす y が、指数関数 $y = a^x$ の逆関数である。それを $\log_a x$ と書き、***a* と底とする対数関数**という。すなわち、

x を**真数**と呼ぶ。

$$x = a^y \;\Leftrightarrow\; y = \log_a x \quad (a \neq 1, a > 0)$$

$y = a^x$ と $x = a^y$ は x と y を入れ替えただけであるから、$y = \log_a x$ のグラフは $y = a^x$ のグラフを $y = x$ について対称に移動したものになる。

実際、$y = \log_a x$ のグラフは次のようになる。左が $a > 1$ のとき、右が $0 < a < 1$ のときである。



$a = e$ のとき、$\log_e x$ を**自然対数**と呼ぶ。$\log_e$ を $\log$, あるいは $\ln$ と書く。$a = 10$ のとき、$\log_{10} x$ を**常用対数**と呼ぶ。

対数法則. $a > 0, a \neq 1$ とする。このとき次の法則が成り立つ: $\begin{cases} \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \\ \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y \\ \log_a x^p = p \log_a x \ (p \text{ は実数}) \end{cases}$

問題 17. (A) $\log_a x$ の定義域と値域を求めよ。

問題 18. (A) 基本性質：(1) $\log_a a^p = p$ (2) $\log_a a = 1$ (3) $\log_a 1 = 0$ を納得せよ。

問題 19. (A) 対数法則を理解せよ。

問題 20. (A) 底の変換公式: $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ を示せ。 $(a, b, c > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1)$

問題 21. (A) $a^{\log_a b} = b$ を示せ。$(a, b > 0,\ a \neq 1)$

問題 22. (A) 実数 x に対して、$[x]$ を x を超えない最大の整数とする（Gauss 記号）。自然数 m に対して、$K(m) = [\log_{10} m] + 1$ と定義すると、$K(m)$ は m の桁数となる。例えば、$m = 100$ のとき、$K(100) = 3$ は 100 の桁数。

例. $[\pi] = 3$, $[99.99] = 99$, $[10] = 10$.

(1) $K(3)$, $K(35)$, $K(2005)$, $K(8892192)$ を計算し、それぞれの数字の桁数と一致することを確認せよ。

(2) $\log_{10} 2 = 0.301\cdots$ であることを用いて、$2^{30} - 1$ の桁数を調べよ。

1 円からはじめて、前日の 2 倍を 30 日間もらい続けたときの合計金額の答え。

(3) 一般に $K(m)$ が m の桁数となることを示せ。

問題 23. (A) 次の各対数方程式を解け。

(1) $\log_2 x = 3$ (2) $\log_2(x^2 - 2x) = 3$ (3) $\log_x 2 = -1$ (4) $\log_{\frac{1}{x}} 2 = -1$

8. ベキ関数

関数 $y = x^a$ (a: 定数) を**ベキ関数**という。a を**ベキ（指数）**と呼ぶ。ベキ a が整数のときは、有理関数である（特に、自然数のときは、多項式関数）。一般に、a は任意の実数をとることができる。例えば、

べき（巾、冪）

$$x^{1.3}, x^{\pi}, x^{\sqrt{2}}, \sqrt[n]{x^{0.1}}, \ldots$$

a が実数のとき、x^a の定義を

$$x^a = e^{a \log x}$$

とする。定義域は $x > 0$ である。

ただし、$a = 0$ のときは、$x^0 = 1$ $(x > 0)$ と定め、$0^0 = 1$ と定義しておいて、関数 $f(x) = x^0$ の定義域を $x \geq 0$ とする。

例. $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. $y = x^2$ $(x \geq 0)$ の逆関数であり、定義域は $x \geq 0$, 値域は $y \geq 0$.

例. $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. $y = x^3$ $(-\infty < x < \infty)$ の逆関数であり、定義域は $-\infty < x < \infty$, 値域は $-\infty < y < \infty$.

問題 24. (A) 次の各問に答えよ。

(1) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ $(x \geq 0)$ の逆関数とその定義域、値域を求めよ。

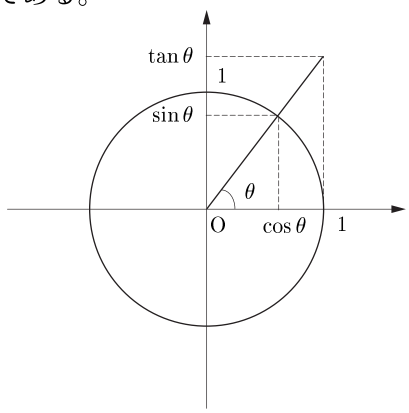
(2) $y = x^2$ $(x < 0)$ の逆関数とその定義域、値域を求めよ。

(3) $y = \sqrt{1-x}$, $y = \sqrt{x^2-1}$, $y = \sqrt{x+1}$ の定義域と値域を求めよ。

$\sqrt{\ }$ を含む関数を**無理関数**という。

9. 三角関数

三角関数の基本は単位円における動径と x 軸のなす一般角、及び動径の指し示す座標との関係である。



高校では、これを基本とし、余弦定理から cos の加法定理を導いた。

実際は、$\cos(\alpha-\beta)$ の加法定理

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

また、$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left((\frac{\pi}{2}-\alpha)+(-\beta)\right)$ より、sin の加法定理を得る。

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

tan の加法定理、和積（積和）の公式、半角、倍角、3 倍角の公式などは加法定理から芋づる式に導出できる。sin と cos の加法定理以外は、がんばって記憶する必要はないが、上の単位円における基本と、三角関数のグラフの特性（定義域、値域、周期性、切片、漸近線など）だけはしっかりと身につけておくとよい。

注. 三角関数の “逆数” を、

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x},\ \sec x=\frac{1}{\cos x},\ \cot x=\frac{1}{\tan x}$$

と表す。

問題 25. (A) sin と cos の加法定理から、tan の加法定理を導け。

問題 26. (A) $\tan\dfrac{\theta}{2}$ を $\sin\theta, \cos\theta$ を用いて表せ。

問題 27. (A) $\sin(n\pi), \cos(n\pi), \sin(n+\frac{1}{2})\pi, \cos(n+\frac{1}{2})\pi$ を簡単にせよ。

問題 28. (A) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくとき、次の等式を証明せよ。

この変数変換は強力である。

$$(1)\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\quad (2)\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad (3)\ \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

10.　双曲線関数

次の関数を**双曲 (線) 関数**という。

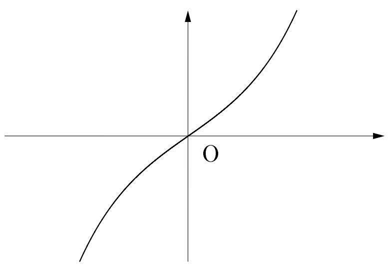
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

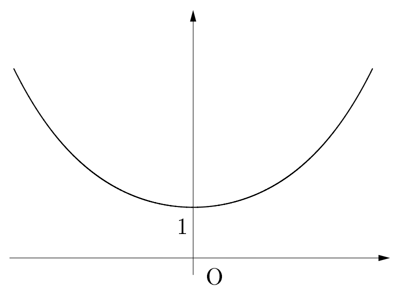
左からそれぞれ、**双曲正弦** (hyperbolic sine)、**双曲余弦** (hyperbolic cosine)、**双曲正接** (hyperbolic tangent) と呼ぶ。オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を使うと、

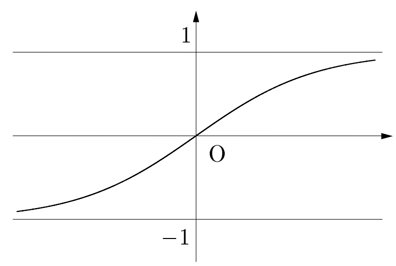
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

である。ここで、i は虚数単位。この i を形式的に落したものが双曲線関数である。双曲線関数に対しては、三角関数と “似たような” 関係式が成立する。問題を見よ。

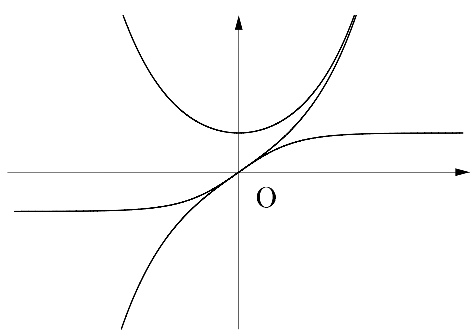
下の図は左から、双曲正弦、双曲余弦、双曲正接である。







まとめて、同一平面に描くと、次のようになる。



問題 29. (A) 次を示せ。

(1)　$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2)　$1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2 x$

(3)　$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(4)　$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

ここで、$\mathrm{sech}\, x = 1/\cosh x$ である。

(1) において、$x = \cosh t$, $y = \sinh t$ とおくと、双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を得る。$x = \cos t$, $y = \sin t$ が、単位円 $x^2 + y^2 = 1$ のパラメータ表示になっているのと同じことである。双曲線関数は、のちに複素関数論（数学解析 III）で再登場する。

問題 30. (A) $\tanh(x+y)$ を $\tanh x$, $\tanh y$ を用いて表せ。

問題 31. (B) $\sinh x$ $(-\infty < x < \infty)$, $\cosh x$ $(x \geq 0)$, $\tanh x$ $(-\infty < x < \infty)$ の逆関数 $\mathrm{arcsinh}\, x$, $\mathrm{arccosh}\, x$, $\mathrm{arctanh}\, x$ をそれぞれ対数関数や無理関数を用いて表し、各定義域と値域を記せ。

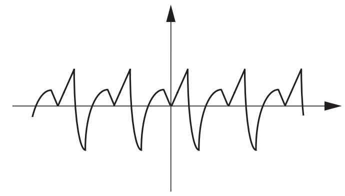
arcsinh を $\sinh^{-1}$ とも表す。arccosh, arctanh についても同じ。

11.　関数の特性

三角関数 $f(x) = \sin x$ は $f(x + 2\pi) = f(x)$ を満たす。即ち、2π ごとに同じ値をとる。このような関数を周期 2π の**周期関数**という。より一般に、

$$f(x + T) = f(x)$$

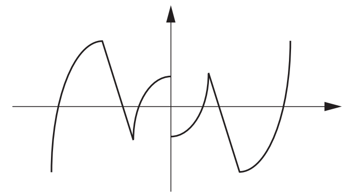
を満たす関数 $f(x)$ を周期 T の周期関数と呼ぶ。



また、$f(x) = \sin x$ は

$$f(-x) = -f(x)$$

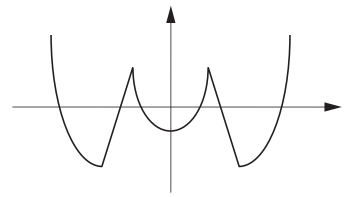
という関係式も満たす。このような関数を**奇関数**という。
奇関数の例. $x, x^3, x^5, x^7, \ldots, \sin x, \tan x, \sinh x, \tanh x, \ldots$



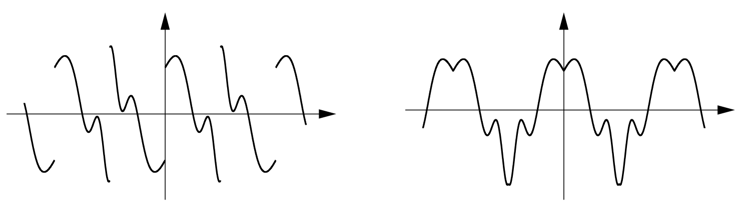
一方、$f(x) = \cos x$ は

$$f(-x) = f(x)$$

という関係式を満たす。このような関数を**偶関数**という。
偶関数の例. $x^2, x^4, x^6, x^8, \ldots, \cos x, \cosh x, \ldots$



上の関数を組み合わせた関数もあり得る。下の図は、奇関数の周期関数（左）と偶関数の周期関数（右）である。



例えば、$\sin x$ は奇関数の周期関数で、$\cos x$ は偶関数の周期関数である。

関数のある種対称的な特性は上の 3 点に代表され、三角関数はその格好の例であった。指数関数や対数関数の特性も次のように標語的に表現される。

指数関数は、和が積になる関数
対数関数は、積が和になる関数

この意味も含め、下の問題を解いてほしい。

問題 32. **(A)** 真偽を答えよ。真の場合は理由を述べ、偽の場合は反例をあげよ。

(1) 奇関数と奇関数の積は偶関数　(2) 奇関数と奇関数の和は偶関数
(3) 偶関数と偶関数の積は奇関数　(4) 偶関数と偶関数の和は奇関数
(5) 奇関数と偶関数の積は奇関数　(6) 奇関数と偶関数の和は奇関数

問題 33. **(A)** 次の性質を満たす関数 $f(x)$ の具体例を 2 つずつあげよ。

(1) $f(x + 1) = f(x)$　(2) $f(x + 1) = 3f(x)$　(3) $f(x) = f(-x)$
(4) $f(x) = -f(-x)$　(5) $f(x + y) = f(x)f(y)$　(6) $f(xy) = f(x) + f(y)$

12. 逆三角関数

逆正弦関数. $y=\sin x$ の定義域を $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ に制限すると、この区間で単調増加となり、逆関数をもつ。これを $y=\mathbf{Arcsin}\,x$ と書く。$y=\mathrm{Arcsin}\,x$ の定義域は $[-1,1]$, 値域は $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ である。

このとき値域は $[-1,1]$.
もしくは、$y=\mathbf{Sin^{-1}}\,x$

一般に、$y\in[-1,1]$ を与えたとき、$y=\sin x$ をみたす x を $x=\mathbf{arcsin}\,y$ と書く。$y=\arcsin x$ の定義域は $[-1,1]$, 値域は $(-\infty,\infty)$ で、無限多価関数である。そこで、$y=\arcsin x$ の値域を $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ に制限すると、この区間では 1 価関数となり、これは $\mathrm{Arcsin}\,x$ に等しい。$\mathrm{Arcsin}\,x$ を $\arcsin x$ の**主値**という。

もしくは $x=\mathbf{sin^{-1}}y$

逆余弦関数. $y=\cos x$ の定義域を $[0,\pi]$ に制限すると、この区間で単調減少となり、逆関数をもつ。これを $y=\mathbf{Arccos}\,x$ と書く。$y=\mathrm{Arccos}\,x$ の定義域は $[-1,1]$, 値域は $[0,\pi]$ である。

このとき値域は $[-1,1]$.
もしくは、$y=\mathbf{Cos^{-1}}\,x$

一般に、$y\in[-1,1]$ を与えたとき、$y=\cos x$ をみたす x を $x=\mathbf{arccos}\,y$ と書く。$y=\arccos x$ の定義域は $[-1,1]$, 値域は $(-\infty,\infty)$ で、無限多価関数である。そこで、$y=\arccos x$ の値域を $[0,\pi]$ に制限すると、この区間では 1 価関数となり、これは $\mathrm{Arccos}\,x$ に等しい。$\mathrm{Arccos}\,x$ を $\arccos x$ の**主値**という。

もしくは $x=\mathbf{cos^{-1}}y$

逆正接関数. $y=\tan x$ の定義域を $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ に制限すると、この区間で単調増加となり、逆関数をもつ。これを $y=\mathbf{Arctan}\,x$ と書く。$y=\mathrm{Arctan}\,x$ の定義域は $(-\infty,\infty)$, 値域は $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ である。

このとき値域は $(-\infty,\infty)$.
もしくは、$y=\mathbf{Tan^{-1}}\,x$

一般に、$y\in(-\infty,\infty)$ を与えたとき、$y=\tan x$ をみたす x を $x=\mathbf{arctan}\,y$ と書く。$y=\arctan x$ の定義域は $(-\infty,\infty)$, 値域は $(-\frac{\pi}{2}+n\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ で、無限多価関数である。そこで、$y=\arctan x$ の値域を $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ に制限すると、この区間では 1 価関数となり、これは $\mathrm{Arctan}\,x$ に等しい。$\mathrm{Arctan}\,x$ を $\arctan x$ の**主値**という。

もしくは $x=\mathbf{tan^{-1}}y$

注. 関数といえば 1 価であるものを指すことが多いので、今後は小文字の $\arcsin,\arccos,\arctan$ をもって主値を指すことにする。

ほとんどの場合、主値しか考えない。問題 38. は例外的。

問題 34. (A) 次の各値を求めよ。

$$(1)\ \arcsin\frac{1}{2}\quad(2)\ \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})\quad(3)\ \arccos(-\frac{1}{2})\quad(4)\ \arccos 0\quad(5)\ \arcsin(-\sqrt{2})$$

問題 35. (B) 次の各値を求めよ。

$$(1)\ \arccos(\sin\frac{6}{5}\pi)\quad(2)\ \arcsin(\cos\frac{4}{5}\pi)\quad(3)\ \arcsin(\tan\frac{1}{3})\quad(4)\ \tan(\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}))$$

問題 36. (B) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

問題 37. (C) 次の各関数のグラフを描け。

$$(1)\ f(x)=\arcsin(\sin x)\quad(2)\ g(x)=\arccos(\cos x)\quad(3)\ h(x)=\arctan(\tan x)$$

問題 38. (C) 各整数 $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ に対して、以下を示せ。

(1) $\arcsin x=(-1)^m\,\mathrm{Arcsin}\,x+m\pi$

(2) $\arccos x=(-1)^m\,\mathrm{Arccos}\,x+m\pi+(1-(-1)^m)\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\arctan x=\mathrm{Arctan}\,x+m\pi$