

# 線型独立性

2005/04/24 by 矢崎

## 目次

1.	線型独立性 . . . . .	2
2.	$\mathbb{R}^2$ における線型独立性 . . . . .	3
3.	$\mathbb{R}^3$ における線型独立性 . . . . .	4
4.	$\mathbb{R}^n$ における線型独立性 . . . . .	5
5.	$\mathbb{R}^2$ の基底 . . . . .	6
6.	基底と次元 . . . . .	7

## 注.

- 問題 (A): これだけは ! (初級)
- 問題 (B): 脳みそに汗が ; (中級)
- 問題 (C): むむ、御主只者でないの。(上級)

## 1. 線型独立性

$\mathbb{R}^n$  の要素  $a_1, a_2, \dots, a_m$  について、少なくとも一つは残りの  $m-1$  個の線型結合で表されるとき、 $a_1, a_2, \dots, a_m$  は線型従属 (1次従属、linearly dependent) であるという。そうでないとき、線型独立 (1次独立、linearly independent) であるという。言い換えると、次の定理になる。

定理.

(1)  $a_1, a_2, \dots, a_m$  が線型従属である。

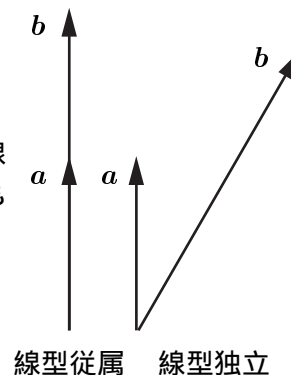
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \neq (0, 0, \dots, 0) \end{cases} \text{となる } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \text{ が存在する。}$$

(2)  $a_1, a_2, \dots, a_m$  が線型独立である。

$$\Leftrightarrow \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \text{ ならば } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = (0, 0, \dots, 0) \text{ である。}$$

$\mathbb{R}^2$  の場合.  $a, b \in \mathbb{R}^2$  について、 $\alpha a + \beta b = 0$  とおく。  $\alpha \neq 0$  とすると、 $a = -\frac{\beta}{\alpha}b$ ,  $\beta \neq 0$  とすると、 $b = -\frac{\alpha}{\beta}a$  であるから、 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  のとき、 $a, b$  のどちらか一方が他方のスカラー倍で表される。このとき、 $a, b$  は線型従属である。したがって、 $a, b$  が線型独立であるとき、いずれの一方も他方のスカラー倍では表されない。ゆえに、以下の幾何学的解釈ができる。

$$\begin{aligned} a, b \in \mathbb{R}^2 \text{ が線型従属} &\Leftrightarrow a, b \in \mathbb{R}^2 \text{ が同一直線上にある} \\ a, b \in \mathbb{R}^2 \text{ が線型独立} &\Leftrightarrow a, b \in \mathbb{R}^2 \text{ が同一直線上にない} \end{aligned}$$

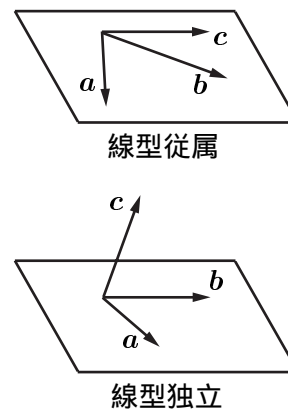


例.

- (1) ベクトル  $(1, 0)$  とベクトル  $(0, 1)$  は線型独立である。
- (2) ベクトル  $(1, 1)$  とベクトル  $(1, 1.00001)$  は線型独立である。
- (3) ベクトル  $(1, 1)$  とベクトル  $(2, 2)$  は線型従属である。
- (4) ベクトル  $(1, 1)$  とベクトル  $(0, 0)$  は線型従属である。

$\mathbb{R}^3$  の場合.  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  について、 $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$  とおく。  $\alpha \neq 0$  とすると、 $a = -\frac{\beta}{\alpha}b - \frac{\gamma}{\alpha}c$ , すなわち、 $a$  は  $b$  と  $c$  の線型結合で表される。言い換えると、 $a$  は  $b$  と  $c$  を含む平面内のベクトルである。このとき、 $a, b, c$  は線型従属である。  $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$  のときも同様である。そうでないとき、線型独立であるのだから、次の幾何学的解釈ができる。

$$\begin{aligned} a, b, c \in \mathbb{R}^3 \text{ が線型従属} &\Leftrightarrow a, b, c \in \mathbb{R}^3 \text{ が同一平面上にある} \\ a, b, c \in \mathbb{R}^3 \text{ が線型独立} &\Leftrightarrow a, b, c \in \mathbb{R}^3 \text{ が同一平面上にない} \end{aligned}$$



問題 1. (A) 次の各問に答えよ。

- (1) 線型独立な  $\mathbb{R}^2$  のベクトルの組の例を挙げよ。
- (2) 線型従属な  $\mathbb{R}^2$  のベクトルの組の例を挙げよ。
- (3) 線型独立な  $\mathbb{R}^3$  のベクトルの組の例を挙げよ。
- (4) 線型従属な  $\mathbb{R}^3$  のベクトルの組の例を挙げよ。

## 2. $\mathbb{R}^2$ における線型独立性

問  $\mathbb{R}^2$  において、次のベクトルの組  $a, b$  の線型独立性を判定してみよう：

$$a = \begin{pmatrix} 12 \\ 7-k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7+k \\ 4 \end{pmatrix}.$$

答  $\alpha a + \beta b = 0$  とおくと、

$$\begin{cases} 12\alpha + (7+k)\beta = 0, \\ (7-k)\alpha + 4\beta = 0, \end{cases} \quad \dots\dots (*)$$

より、上の式を 4 倍、下の式を  $7+k$  倍すると、

$$\begin{cases} 48\alpha + (28+4k)\beta = 0, \\ (49-k^2)\alpha + (28+4k)\beta = 0. \end{cases} \quad \dots\dots (**)$$

(\*\*) の上の式から下の式を引いて、 $(k^2-1)\alpha = 0$  を得る。よって、 $k \neq \pm 1$  ならば、 $\alpha = 0$ 。これより、(\*) の下の式から、 $\beta = 0$  を得る。 $k = 1$  のときは、(\*) の上の式も下の式も  $3\alpha + 2\beta = 0$  となり、 $k = -1$  のときは、(\*) の上の式も下の式も  $2\alpha + \beta = 0$  となるので、 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  である適当な  $\alpha, \beta$  を用いて、 $\alpha a + \beta b = 0$  とすることができる。(実際、例えば、 $k = 1$  のときは、 $-2a + 3b = 0$ 、 $k = -1$  のときは、 $-a + 2b = 0$  である。)

$a, b$  は、 $k \neq \pm 1$  のとき線型独立、 $k = \pm 1$  のとき線型従属である。 ■

問題 2. (B)  $\mathbb{R}^2$  のベクトル  $a_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  について、

- (1)  $a_1, a_2$  が線型独立であるためには、 $ad - bc \neq 0$  が必要十分であることを示せ。
- (2)  $ad - bc \neq 0$  であるとき、 $\mathbb{R}^2$  の基本ベクトル  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  を、それぞれ  $a_1, a_2$  の線型結合として表せ。
- (3)  $\mathbb{R}^2$  の任意のベクトル  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を、 $e_1, e_2$  の線型結合として表せ。
- (4) (2)(3) から、 $ad - bc \neq 0$  であるとき、 $\mathbb{R}^2$  の任意のベクトル  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を、 $a_1, a_2$  の線型結合として表せ。
- (5)  $ad - bc \neq 0$  であるとき、 $a_1, a_2$  の他に第 3 のベクトル  $a_3$  をもってきたとき、それがどんなものであっても  $a_1, a_2, a_3$  は必ず線型従属になる。なぜか。
- (6) 一般に、 $\mathbb{R}^2$  内の 3 つ以上のベクトルの組は必ず線型従属になる。なぜか。

### 3. $\mathbb{R}^3$ における線型独立性

問  $\mathbb{R}^3$  において、次のベクトルの組  $a, b, c$  の線型独立性を判定してみよう：

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

答  $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$  とおくと、 $\gamma k = 0, \alpha = \beta, \alpha + \beta + \gamma = 0$  を得る。よって、 $k \neq 0$  のとき、 $\gamma = 0$ 、したがって  $\alpha = \beta = 0$  を得る。 $k = 0$  のとき、 $\gamma = -2\alpha, \alpha = \beta$ 、したがって  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$  である  $\alpha, \beta, \gamma$  を用いて、 $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$  とすることができる。例えば、 $a + b - 2c = 0$ 。以上より、 $a, b, c$  は、 $k \neq 0$  のとき線型独立、 $k = 0$  のとき線型従属である。■

問題 3. (A)  $v_1, v_2, v_3$  は線型独立、 $v_1, v_2, v_3, v_4$  は線型従属であることを示せ：

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

問題 4. (A) もし  $a = 0$  か、 $d = 0$  か、 $f = 0$  ならば (3 通りの場合)、 $v_1, v_2, v_3$  は線型従属であることを示せ：

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} c \\ e \\ f \end{pmatrix}.$$

また、 $a, d, f$  がどれも零でないならば、 $v_1, v_2, v_3$  は線型独立であることを示せ。

問題 5. (A) 以下の各組のベクトルについて、線型独立か線型従属かを判定せよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad a &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} & (2) \quad a &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ (3) \quad a &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (4) \quad a &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (5) \quad a &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} & (k \text{ について場合分けせよ。}) \end{aligned}$$

問題 6. (B)  $v_1, v_2, v_3, v_4$  は  $\mathbb{R}^3$  のベクトルとする。

- (1)  $v_1, v_2, v_3, v_4$  は線型従属である。なぜか。
- (2)  $v_1, v_2$  が線型従属となる条件は何か。
- (3)  $v_1$  と  $(0, 0, 0)$  は線型従属である。なぜか。

#### 4. $\mathbb{R}^n$ における線型独立性

**問**  $\mathbb{R}^n$  のベクトル  $a_1, a_2$  が線型独立のとき、 $aa_1 + ba_2, ca_1 + da_2$  も線型独立であるための  $a, b, c, d$  の条件は？

**答**  $aa_1 + ba_2, ca_1 + da_2$  が線型独立であるためには、 $\alpha(aa_1 + ba_2) + \beta(ca_1 + da_2) = 0$  ならば、 $\alpha = \beta = 0$  がいえなければならず、 $a_1, a_2$  の線型独立から、それは、 $\alpha, \beta$  についての連立 1 次方程式 
$$\begin{cases} \alpha a + \beta c = 0 \\ \alpha b + \beta d = 0 \end{cases}$$
 が自明解  $\alpha = \beta = 0$  しかもたないことに等しい。したがって、そのための条件は  $ad - bc \neq 0$  である。 ■

問題 7. (A) 以下の各問に答えよ。

(1) 次のベクトルの中で、線型独立なもの組の最大数はいくつか。

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2)  $v_1, v_2, v_3, v_4$  から線型独立なベクトルを 3 つずつ 3 通り挙げよ。 $w_1, w_2, w_3, w_4$  に対しても同様の考察をせよ。

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}; w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(3)  $a, b, c \in \mathbb{R}^n$  が線型独立であるとき、次の各主張が成立することを示せ。

(i)  $a, b, c$  のどの 2 つの組も線型独立。

(ii)  $v_1 = a + b, v_2 = b + c, v_3 = c + a$  は線型独立。

(iii)  $v_1 = a - b, v_2 = b - c, v_3 = c - a$  は線型従属。

(iv)  $v_1 = a, v_2 = a + b + c, v_3 = a - b - c$  は線型従属。

(v)  $v_1 = a + b - 2c, v_2 = a - b - c, v_3 = a + c$  は線型独立。

(vi)  $v_1 = a + b - 3c, v_2 = a + 3b - c, v_3 = b + c$  は線型従属。

(4)  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ , および任意の  $c_2, c_3, \dots, c_m \in \mathbb{R}$  に対し、

$$a'_1 = a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + \dots + c_m a_m$$

とおく。このとき、 $a_1, a_2, \dots, a_m$  が線型独立ならば、 $a'_1, a_2, \dots, a_m$  も線型独立であることを示せ。

(5)  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$  が線型独立であるならば、 $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$  の線型結合による表現は一意的である、つまり、

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_k a_k = c'_1 a_1 + c'_2 a_2 + \dots + c'_k a_k \Rightarrow c_1 = c'_1, c_2 = c'_2, \dots, c_k = c'_k$$

が成り立つことを示せ。また、逆も成り立つことを示せ。

問題 8. (B)  $\mathbb{R}^4$  内の平面  $x + 2y - 3z - t = 0$  上で 2 つの線型独立なベクトルを見つけよ。次に、3 つを見つけよ。更に、4 つは見つかるか。

## 5. $\mathbb{R}^2$ の基底

実 2 次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^2$  に基本ベクトルの組

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとる。

このとき、以下の 3 つの性質が成り立つ。

- (1) 一意性. 任意のベクトル  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  は、

$$v = xe_1 + ye_2$$

とただ 1 通りに表される。

- (2) 正規性. 大きさは 1 である :  $|e_i| = 1$  ( $i = 1, 2$ )  
 (3) 直交性. 互いに直交する :  $e_1 \cdot e_2 = 0$

- (1) が成り立つことを、 $e_1$  と  $e_2$  は  $\mathbb{R}^2$  の基底 basis をなすといい、

$$\langle e_1, e_2 \rangle$$

などと表す。(1)(2)(3) が成り立つことを、 $e_1$  と  $e_2$  は  $\mathbb{R}^2$  の正規直交基底をなすという。

**問** 任意のベクトル  $v \in \mathbb{R}^2$  に対し、

$$v = x_1 a_1 + x_2 a_2$$

となるような、実数の組  $x_1, x_2$  が必ずただ 1 組のみ存在するようなベクトルの組  $a_1, a_2$  が  $e_1, e_2$  以外に存在するか。

**答** 存在する。

言い換えると、 $\mathbb{R}^2$  の基底は  $e_1, e_2$  以外に存在するか。

問題 2.(4) を見よ。

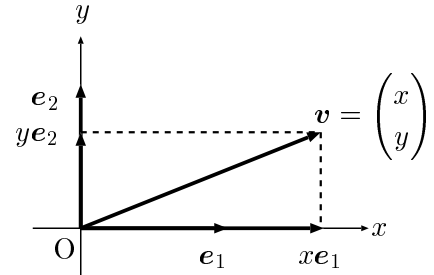
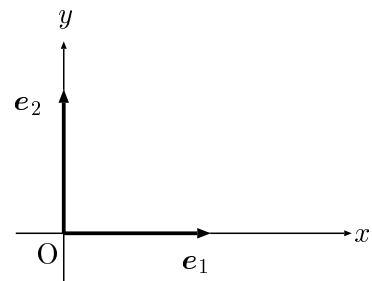
**問**  $\mathbb{R}^2$  において、基底が  $e_1, e_2$  以外に存在することはわかった。では基底を構成するベクトルの数は必ず 2 であるか。

**答** 2 である。

問題 2.(5)(6) を見よ。

問題 9. (A) 次の各問に答えよ。

- (1)  $\mathbb{R}^2$  において、 $\langle a, b \rangle$  がその基底ならば、 $\langle a + b, a - b \rangle$  もその基底であることを示せ。  
 (2)  $\mathbb{R}^2$  において、 $\langle e_1, e_2 \rangle$  以外の大きさが 1 の基底の例をあげよ。  
 (3)  $\mathbb{R}^2$  において、 $\langle e_1, e_2 \rangle$  以外の正規直交基底の例をあげよ。



## 6. 基底と次元

実  $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  において、基本ベクトルの組

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

は基底を与える。

実際、 $\mathbb{R}^n$  の任意のベクトル  $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  は、

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

と一意に表現できる。

問題 7.(5) を見よ。

基底  $\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$  は  $\mathbb{R}^n$  の正規直交基底であり、これを特に標準基底と呼ぶ。 $\mathbb{R}^2$  でそうであったように、 $\mathbb{R}^n$  においても基底は標準基底以外にも（無数に）構成することができ、その取り方は一意的でない。しかし、その基底を構成するベクトルの個数は一定である。つまり線型空間  $\mathbb{R}^n$  の基底は、（それが何であっても常に） $n$  個のベクトルから構成される。この  $n$  を次元 dimension といい、

直観的には正しいと感じる。行列論にて証明される。

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

と表す。

問題 10. (A) 次の各問に答えよ。

(1)  $\mathbb{R}^3$  において、 $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  は基底を与える

ことを示せ。

(2)  $\mathbb{R}^3$  において、 $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  以外の大きさが 1 の基底をあげよ。

(3)  $\mathbb{R}^3$  において、 $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  以外の正規直交基底をあげよ。

(4)  $\mathbb{R}^n$  において、 $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $a_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  は基底を与

えることを示せ。