応用数学 2　　2005 年 1 月 13 日
第 7 回

フーリエ変換 (その 2)：周期関数から非周期関数へ

- 4 フーリエ変換
- 4.1 周期関数から非周期関数へ
- 4.2 フーリエの積分定理
- 4.3 フーリエ変換

- 4.1 周期関数から非周期関数へ

  前回の復習：

  – 今までは表現したい関数（信号）の周期が 2π であると仮定してきたが，これからは周期的でないものを扱いたい．このため周期 T を ∞ と考え，$\cos\{2\pi n/T\}, \sin\{2\pi n/T\}$ を使った複素フーリエ級数表現を使い T を ∞ にする．

- 4.3 フーリエ変換

  – フーリエ変換：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

  – フーリエ逆変換：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

  ※ $F(\omega)$ は普通，複素数値になる．
  ※ 複素フーリエ級数表現と比べてみる（ほぼ同じ．周期 $T \to \infty$）．
  ※ $f(x)$ が奇関数なら $F(\omega)$ は純虚数，$f(x)$ が偶関数なら $F(\omega)$ は実数になる．

  – 計算例 1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

  $a > 0$,　のフーリエ変換.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} \left[e^{-ax} e^{-i\omega x} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a+i\omega} \end{aligned}$$

  ※ $e^{-ax}e^{-i\omega x} = e^{-ax}(\cos\omega x - i\sin\omega x)$ より $x \to \infty$ のとき $e^{-ax}e^{-i\omega x} \to 0$

  – 計算例 2. 矩形波のフーリエ変換．結果は sinc 関数.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -a < x < a \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

のフーリエ変換.

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega x} dx \\
&= \int_{-a}^{a} (\cos \omega x - i \sin \omega x) dx \\
&= \int_{-a}^{a} (\cos \omega x) dx \\
&= \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega x \right]_{-a}^{a} = \frac{1}{\omega} \left[\sin \omega a - \sin \omega(-a) \right] \\
&= \frac{2 \sin \omega a}{\omega} \\
&= \frac{2a \sin a\omega}{a\omega} = 2a \mathrm{sinc} a\omega
\end{aligned}$$

– 計算例 3. ガウス分布のフーリエ変換. 結果はガウス分布.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

のフーリエ変換.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega x} dx$$