情報システム工学科
伊達 章



# フーリエ変換 (その 4)

- 前回の演習の解説
- 4.5 デルタ関数とフーリエ変換
- 4.6 たたみこみ
- 5 ラプラス変換
- 5.1 ラプラス変換

---

- 4.5 デルタ関数とフーリエ変換
  - デルタ関数 $\delta(x)$ とは何だったか．
    デルタ関数は $x = 0$ に面積 1 が集中した関数．つまり $x = 0$ 以外では値 0 をとる関数である．このような関数を 0 を含む区間で積分すると，普通の関数であれば 0 となる．ところがデルタ関数はそうはならない．そうならないことが定義 $\int_{\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$ である．$\delta(0)$ の値は無限大のようなものであるが，特定することはできない (この後，$2\pi\delta(x)$ などという表現も出現する)．おかしい点もでてくると思うが，そうなると思って話を進めても不都合はおこらない．
  - デルタ関数のフーリエ変換
    フーリエ変換は関数から関数への写像で区分的なめらかでかつ絶対積分可能な関数であればフーリエ変換 (関数から関数への一対一写像) できた．デルタ関数はその定義からして絶対積分可能である．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx \quad = \quad 1 \tag{1}$$

デルタ関数のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(x)] &= \quad (2) \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i\omega x}dx \quad (3) \\ &= e^{-i\omega x}|_{x=0} \quad (4) \\ &= 1 \quad (5) \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \quad = \quad f(0) \tag{6}$$

というデルタ関数の性質を用いた．
次に，この結果をフーリエ逆変換

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \tag{7}$$

できたとするとデルタ関数にもどるはずなので，

$$\begin{aligned} \delta(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[\delta(x)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \quad (8) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega \quad (9) \end{aligned}$$

となる．これはデルタ関数の積分を使った表現と思っていい．複素指数関数を $-\infty$ から $\infty$ まで積分するとデルタ関数の $2\pi$ 倍

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \quad = \quad 2\pi\delta(x) \tag{10}$$

となる (これは定義のようなものと思えばいい)．次に，デルタ関数は偶関数という性質 $\delta(x) = \delta(-x)$ を使うと，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d\omega \quad = \quad 2\pi\delta(x) \tag{11}$$

も成り立つ．この二つの式は今後よく使うようになる．

– 定数 1 のフーリエ変換

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[1] &= \qquad (12) \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dx = 2\pi\delta(\omega) \qquad (13) \end{aligned}$$

デルタ関数をフーリエ変換したら 1 になった．その知識があれば，1 をフーリエ変換すると，デルタ関数 (の定数倍) になることは，フーリエ変換の性質 (フーリエ変換の対称性と教科書には書かれている) を知っていればわかる．この式は先にもでてきたが，積分表現をつかったデルタ関数の定義だと思えばいい．

– 余弦関数，正弦関数のフーリエ変換

まず $e^{-i\omega_0 x}$ のフーリエ変換を計算しておこう．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-i\omega_0 x}] &= \qquad (14) \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 x} e^{-i\omega x} dx \qquad (15) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_0+\omega)x} dx \qquad (16) \\ &= 2\pi\delta(\omega_0 + \omega) \qquad (17) \end{aligned}$$

最後の等号は式 (10) の結果をもちいた．この結果を用いて，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos\omega_0 x] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x}}{2}\right] \qquad (18) \\ F(\omega) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x}] \qquad (19) \\ &= \pi(\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega)) \qquad (20) \end{aligned}$$

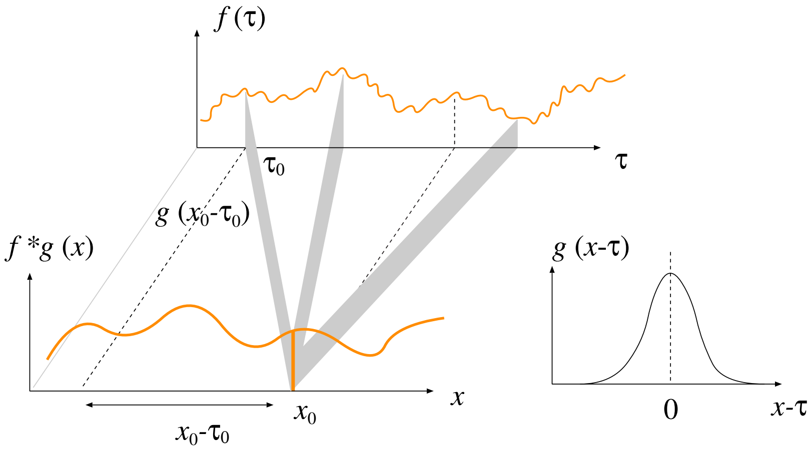
となる．

– 周期的デルタ関数のフーリエ変換

周期的デルタ関数のフーリエ変換は周期的デルタ関数となる．

- 4.6 たたみこみ

$$f * g(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau$$




これが「たたみこみ」の定義である．この式を見ただけでは，その意味はわかりにくいし,「たたみこみ」という言葉がその意味を直感的には伝えてくれない.「たたみこみ」の意味は「8. 線形システムの解析」で明確になるが，一つの解釈として，2 つの信号 $f(x), g(x)$ があったときに，どちらかを重みの係数だと考えればわかりやすい．図では $f(x)$ を信号，$g(x)$ を重みであると解釈している．たたみこんで得られた関数 $f * g(x)$ は各場所 (時間） $x$ において，場所 $f(\tau)$ の信号を $g(x-\tau)$ の重みを掛け算して $\tau = -\infty$ から $\infty$ まで足す操作をおこなった結果である．$f(x)$ を重みの係数だと思ってもよく，

$$f * g(x) \quad = \quad g * f(x)$$

が成り立っている．今の段階では，何がなんだかわからないかもしれない．ここでは，こういう説明で勘弁してもらいたい．重要なことは，

$$f * g(x) \quad \rightarrow \quad F(\omega)G(\omega)$$

という，2 つの関数をたたみこみんだ関数のフーリエ変換は，それぞれの関数をフーリエ変換したものを掛け算した結果と同じになることである．

- パーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

教科書では，パーセバルの等式を証明するときに「たたみこみ」を使っている．自分自身 ($f(x)$）の軸を $y$ 軸対称に反転したものの共役を重みとみてたたみこんでいる．この証明からは「たたみこみ」の意味はまったく見えない．そもそも「たたみこみ」は，こういうことをするために説明したのではないはずであるが，誰がどういう経緯でこういう証明の仕方を見つけたのか，歴史的背景のほうが知りたくなる．

- 相関関数

「相関関数」は文字通り，2 つの信号があったときに，それらがどのくらい類似しているかを示す指標である.「相関関数」は，どういうわけか，たたみこみを用いた式で書くことができる．(これも「たたみこみ」の本来の意味とは違うように思う.）したがっ

て相関関数のフーリエ変換は，ある 2 つの関数の掛け算で書くことができる．これは便利である．というのは，相関関数は [掛け算の結果を足し合わせる」操作をすることから，計算に時間がかかる．そこでそれぞれをフーリエ変換した結果が既にあるなら，それが使えるので計算が簡単になる．これは便利なので，この知識は頭のすみに置いておこう．ただ，フーリエ変換の計算も手間がかかるから，それぞれをフーリエ変換した結果がなかったら，わざわざフーリエ変換する必要はあるかどうか，どっちが得なのか考える必要はある．

- 5.1 ラプラス変換

  微分方程式を代数方程式に変換する「演算子法」と呼ばれているものの一つがラプラス変換.

  ※ ヘビサイド： $\dfrac{d}{dt} = p, \int dt = \dfrac{1}{p}$ とし，電気回路の問題を簡単に解く方法を考案した（ヘビサイドの演算子法．数学者には相手にされなかった）.

  – ラプラス変換：
  $$F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$
  – $x < 0$ で $f(x) = 0$.

  – $s$ は複素数. $s = \alpha + i\beta, \alpha, \beta$ は実数，とすると，$e^{-sx} = e^{-(\alpha+i\beta)x} = e^{-\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$

  – 書き直すと
  $$F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-\alpha x}\cos\beta x dx - i\int_0^\infty f(x)e^{-\alpha x}\sin\beta x dx$$
  となり，$F(s)$ は一般に複素数になることがわかる.

  – 特徴 1： $x$ 表現から $s$ 表現を用いたほうが，問題が用意に解ける.

  – 特徴 2： $s$ 表現が対象としている問題の本質に迫ることができる.

  – 計算例 1.
  $$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
  $$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx}dx \\ &= -\frac{1}{s}\left[e^{-sx}\right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{s}\left[e^{-(\alpha+i\beta)x}\right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{s}\left[e^{-\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right]_0^\infty \ (\alpha > 0 \text{ でなければ値が定まらないことの注意}) \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$