

### 線形システムの解析

- 演習問題の解説：インパルス応答と入力信号とのたたみこみにより出力を計算．
- 8.3 周波数特性
- 8.3 伝達関数としての周波数特性
- 8.3 周波数特性の振幅と位相

---

#### • 8.2 インパルス応答 $h(t)$

線形時不変システムのインパルス応答  $h(t)$  がわかっているならば、信号  $f(t)$  がシステムに入力された場合、出力  $g(t)$  がどうなるかは、以下の式のように  $g(t) = f(t) * h(t)$  というたたみこみと呼ばれるものを計算すれば予測できることがわかった．

$$\begin{aligned} g_1(t) &= S[f(t)] \\ &= S\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)S[\delta(t-\tau)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = g(t) = f(t) * h(t) \end{aligned}$$

このようなシステムを 2 つ直列に繋がれば、その出力がどうなるか考えてみる．入力を  $f(t)$ 、システム 1 の出力を  $g_1(t)$ 、システム 2 の出力を  $g_2(t)$  とすると、

$$\begin{aligned} g_1(t) &= f * h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h_1(t-\tau)d\tau \\ g_2(t) &= \{f * h_1(t)\} * h_2(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1)h_1(\tau_2-\tau_1)d\tau_1\right] h_2(t-\tau_2)d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_1)h_1(\tau_2-\tau_1)h_2(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \end{aligned}$$

となり、出力は 2 重積分で表現できる．システムを 3 つ、4 つと直列に繋がると出力がどのように表現できるかは、ここから予想がつく．このような出力の計算はとても面倒である．

問題は、インパルスを入力しても、インパルスが出てこないことにある．もしインパルスを入力するとインパルスしか出てこないのであれば、入力をインパルスに分解しておけば、出力もインパルスの足し算で済むので都合がいいが、そうはならない．そうはならないのなら、そうなる関数を見つけよう．つまり、

$$S[\psi(t)] = \lambda\psi(t)$$

のように、システムを通過前後の関数形が不変な関数  $\psi(t)$ （固有関数と呼ぶ）があれば都合がいい．天下一で申し訳ないが、その一つとして複素正弦波  $e^{i\omega t}$  がある．これが今までフーリエ級数やフーリエ変換を学習してきた理由の一つである．

● 8.3 周波数特性  $H(\omega)$

- 結果を先にいうと,  $e^{i\omega t}$  を線型時不変システムに入力すると,  $H(\omega)e^{i\omega t}$  が出力される. このことを

$$S[e^{i\omega t}] = H(\omega)e^{i\omega t}$$

と書こう. ここで  $H(\omega)$  はインパルス応答  $h(t)$  のフーリエ変換で周波数特性と呼ばれており,

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{i\text{Arg}H(\omega)}$$

とかける. これが正しいことを式でみてみよう.

$$\begin{aligned} g(t) &= S[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}h(t-\tau)d\tau \\ &\quad \tau' = t - \tau \text{ と置いて} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau')}h(\tau')d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau'}h(\tau')d\tau' e^{i\omega t} \\ &= H(\omega)e^{i\omega t} = |H(\omega)|e^{i\text{Arg}H(\omega)}e^{i\omega t} \end{aligned}$$

これは入力に角周波数  $\omega$  の正弦波が入ると, 出力は入力と同じ角周波数  $\omega$  の正弦波であり, 振幅が入力の振幅の  $|H(\omega)|$  倍, 位相が入力に比べ  $\theta = -\text{Arg}H(\omega)$  だけ遅れて出てくることを意味している. つまり  $e^{i\omega t}$  を入力しても  $e^{i\omega t}$  の周波数は変わらず, その振幅と位相が変化するだけである. したがって複素正弦波  $e^{i\omega t}$  は線型時不変システムにおいて固有関数になっており,  $H(\omega)$  が固有値になっている.

- 線型時不変システムでは入力信号の持つ周波数以外の周波数成分が出力信号に生じることはない.
- したがって, 入力信号を

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

のように, さまざまな角周波数をもつ複素正弦波に分解して表現しておけば, その出力は.

$$\begin{aligned} g(t) &= S[f(t)] = S\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega e^{-i\omega t}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)S[e^{-i\omega t}]d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \end{aligned}$$

と, たたみこみ演算は必要なく, 単に掛け算で表現できる.

よくみると, この式は出力  $g(t)$  が  $F(\omega)H(\omega)$  の逆フーリエ変換になっていることを意味している. したがって出力  $g(t)$  のフーリエ変換  $G(\omega)$  は

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

という関係になっている。

- 8.3 伝達関数としての周波数特性

- 周波数応答  $H(\omega)$  は、

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{F(\omega)}$$

のように、出力信号のフーリエ変換を入力信号のフーリエ変換で割り算した形になっており、これを伝達関数と呼ぶこともある。

- 直列に繋いだシステム

- $S[e^{i\omega t}] = H(\omega)e^{i\omega t}$  という性質を利用して、直列に繋いだシステムの出力がどうなるか考えてみよう。

$$\begin{aligned} g_1(t) &= S[f(t)] \\ &= S\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)S[e^{i\omega t}] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H_1(\omega)e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(t) &= S[g_1(t)] \\ &= S\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H_1(\omega)e^{i\omega t} d\omega\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H_1(\omega)S[e^{i\omega t}] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H_1(\omega)H_2(\omega)e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

この式は、 $g_2(t)$  は  $F(\omega)H_1(\omega)H_2(\omega)$  を逆フーリエ変換したものであることを意味している。したがって、

$$G_2(\omega) = F(\omega)H_1(\omega)H_2(\omega)$$

$$\frac{G_2(\omega)}{F(\omega)} = H_1(\omega)H_2(\omega)$$

となり、直列につないだシステムでは、それぞれのシステムの伝達関数を掛け算したものがシステム全体の伝達関数になっていることがわかる。

- まとめ

周波数特性  $H(\omega)$  は以下の4つの呼び名があった。一つのことだけにこれだけ別名がついているのはややこしいとも思うが、すべて同じこと。これらのことをスッキリと理解したい。

- 周波数特性： $H(\omega)$  により振幅の拡大縮小、位相遅れがわかる。
- インパルス応答のフーリエ変換
- 伝達関数：入力のフーリエ変換に  $H(\omega)$  を掛ければ出力のフーリエ変換が得られる。
- 線型時不変システムの固有値・固有関数（線形代数で言う固有ベクトルのようなもの）は複素正弦波である。