

ラプラス変換

- 演習問題の解説：場合分けについて
- 8.3 周波数特性の振幅と位相
- 5.1 ラプラス変換

● 5.1 ラプラス変換

フーリエ変換の親戚にラプラス変換がある。ラプラス変換も、関数から関数の一対一の写像で、座標変換であり、フーリエ変換とよく似た性質を共有しているが、もちろん異なるものである。たとえば、周波数に分解するなどという直感は効かない。一番の特徴は、微分方程式が代数方程式に変換できることである。詳しいことは、別の科目、特に制御関連でこれから習うと思う。ここでは、その速修をおこなう。

微分方程式を代数方程式に変換する「演算子法」と呼ばれているものの一つがラプラス変換。

ヘビサイド： $\frac{d}{dt} = p, \int dt = \frac{1}{p}$ とし、電気回路の問題を簡単に解く方法を考案した（ヘビサイドの演算子法。数学者には相手にされなかったらしい）。

- ラプラス変換の定義関数 $f(x), x > 0$ に対し、

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx = F(s)$$

この積分が存在するとき、このように定義する。

- $x < 0$ で $f(x) = 0$ と考えてもいい。
- $f(x)$ と $F(x)$ は 1 対 1 対応。
- s は複素数。 $s = \alpha + i\beta, \alpha, \beta$ は実数、とすると、 $e^{-sx} = e^{-(\alpha+i\beta)x} = e^{-\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$ 。書き直すと、

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-\alpha x} \cos \beta x dx - i \int_0^{\infty} f(x)e^{-\alpha x} \sin \beta x dx$$

となり、 $F(s)$ は一般に複素数になることがわかる。

- 天下りで申し訳ないが、ラプラス変換の特徴は以下のようによく言われる。これから実感していけるのではないかと思う。
 - 特徴 1： x 表現から s 表現を用いたほうが、問題が用意に解ける。
 - 特徴 2： s 表現が対象としている問題の本質に迫ることができる。
- 計算例 1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-sx} dx \\
&= -\frac{1}{s} [e^{-sx}]_0^{\infty} \\
&= -\frac{1}{s} [e^{-(\alpha+i\beta)x}]_0^{\infty} \\
&= -\frac{1}{s} [e^{-\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)]_0^{\infty} \quad (\alpha > 0 \text{ と仮定}) \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

以後，こんな丁寧には計算しない．

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

と書いているが，定義域も $x > 0$ は暗黙の了解とする．積分が収束する領域は $\alpha > 0$ つまり $\operatorname{Re} s > 0$ である．これを収束領域などという．

- 計算例 2.

$$f(x) = c, \quad c \text{ は定数}$$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \\
&= \int_0^{\infty} ce^{-sx} dx \\
&= -\frac{c}{s} [e^{-sx}]_0^{\infty} \\
&= \frac{c}{s} \quad \text{収束領域 } \operatorname{Re} s > 0.
\end{aligned}$$

- 計算例 3. ラプラス逆変換．

ラプラス変換は関数から関数の 1 対 1 の写像なので，

$$F(s) = \frac{3}{s}$$

なら

$$f(x) = 3$$

である．

- 計算例 4.

$$f(x) = e^{-x}$$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \\
&= \int_0^{\infty} e^x e^{-sx} dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(s+1)x} dx \\
&= -\frac{1}{s+1} \left[e^{-(s+1)x} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{s+1}
\end{aligned}$$

収束領域 $\operatorname{Re} s + 1 > 0 \rightarrow$ 収束領域 $\operatorname{Re} s > -1$.

• 計算例 5.

$$f(x) = e^{-\alpha x}$$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{-sx} dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)x} dx \\
&= -\frac{1}{s+\alpha} \left[e^{-(s+\alpha)x} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{s+\alpha}
\end{aligned}$$

収束領域 $\operatorname{Re} s + \alpha > 0 \rightarrow$ 収束領域 $\operatorname{Re} s > -\alpha$.

• 5.4 ラプラス変換の性質

ラプラス変換の利点は何か． $f'(x)$ のラプラス変換を考えてみるとそれがわかる．

計算例 6.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(x)\} &= \int_0^{\infty} f'(x)e^{-sx} dx \\
&= \left[f(x)e^{-sx} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -sf(x)e^{-sx} dx \\
&= -f(0) + s \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \\
&= -f(0) + sF(s)
\end{aligned}$$

$-f(0)$ は定数であり，ラプラス変換後は微分表現が消えた．

• 6. 線形常微分方程式の解法

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f(x) &= -f(x) \\
f(0) &= 2
\end{aligned}$$

を考えよう． $f(0)$ は初期値である．なお上記のような式はこれから $f' = -f$ と略して書く． $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ とする． $f' = -f$ の両辺をラプラス変換すると，

$$-f(0) + sF(s) = -F(s)$$

を得る．これを整理し，

$$(s + 1)F(s) = f(0) = 2$$

したがって

$$F(s) = \frac{2}{s + 1}$$

今，我々は，さきほどの計算例から $e^{-\alpha x}$ のラプラス変換が $\frac{1}{s + \alpha}$ になることを知っているし， $\mathcal{L}\{af(x)\} = aF(s)$ となることも知っている．この知識を利用すると，

$$f(x) = 2e^{-x}$$

であることがわかる．この最後の部分がラプラス逆変換を求める操作であり，通常

$$f(x) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1}\right\} = 2e^{-x}$$

などで表現する．

● まとめ

ラプラス変換を使い微分方程式を解くためのプロセスは以下の通りになる．

- 両辺をラプラス変換する．
- 初期値を代入する．
- 代数方程式を解く．
- 逆ラプラス変換し，もとの形式に戻す．

したがってラプラス変換を使うと微分方程式が代数方程式になる．ラプラス逆変換は，直接積分を計算しようとするると大変であるが，ラプラス変換表があれば楽に計算できる．こういう仕掛けである．

- ラプラス逆変換．p.185 のラプラス変換表をみればいい．よく使うのものを以下にまとめておく．

関数	ラプラス変換
$f(x)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$
c	$\frac{c}{s}, s > 0$
$e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{s + \alpha}, s > -\alpha$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$f'(x)$	$-f(0) + sF(s)$
$f''(x)$	$-f(0) - f'(0) + s^2F(s)$
$f^{(n)}(x)$	$-f(0) - f'(0) - sf''(0) + \dots - s^{(n-1)}f(0) + s^nF(s)$
$cf(x)$	$cF(s)$
$af(x) + bg(x)$	$aF(s) + bG(s)$