

【演習問題】

問1： $\sin \pi t$ の基本周期 T を求めよ（図も書いてみる）

【回答例】 $\sin \theta$ は基本周期 2π であるから， $\sin \pi t$ の基本周期 T は $\pi(t+T) - \pi t = 2\pi$ を満たす．したがって $T = 2$.

問2： 周期 2π の関数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

をフーリエ級数展開せよ．

【回答例】

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 1 dx + \int_0^{\pi} 0 dx \right\} = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_{-\pi}^0 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^0 \\ &= \frac{1}{n\pi} (-1 + \cos n\pi) = \frac{-1 + (-1)^n}{n\pi} \end{aligned}$$

したがって n が偶数のとき $b_n = 0$, n が奇数のとき $b_n = -\frac{2}{n\pi}$ となり，

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

【解説】

a_0 は $f(x)$ の平均値である．これを級数に付け加えるのを忘れないこと． $\cos nx = (-1)^n$ を使えばすっきり書ける．