2004 年 12 月 16 日 　　　　　　　　　　　　学籍番号：
応用数学 2 　　　　　　　　　　　　　　　　名前：

【演習問題】
問 1： e^{inx} と e^{imx}， n, m は整数で $n \neq m$，が区間 $-\pi < x < \pi$ で直交していることを示せ.
(ヒント： 内積 $(\mathrm{e}^{inx}, \mathrm{e}^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{inx}\mathrm{e}^{-imx}dx = 0$ を示せばいい.)
【回答例】

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{e}^{inx}, \mathrm{e}^{imx}) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{inx}\mathrm{e}^{-imx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)x}dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos((n-m)x) + i\sin((n-m)x)\}dx \\
&= 2\int_{0}^{\pi} \cos((n-m)x)dx \\
&= -2(n-m)[\sin((n-m)x)]_0^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

【解説】複素数の値をもつ関数なので，内積をとる際には一方の複素共役をとる.

問 2： 周期 2π の関数 $f(x) = x^2$ の複素フーリエ級数を求めよ.
【回答例】$f(x)$ を $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ と複素フーリエ級数表現するとき，その係数 c_n は

$$
c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx
$$

と計算できる．具体的には,

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\right)' dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[x^2\left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\right)dx\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{-\frac{\pi^2}{in}\left(e^{-in\pi} - e^{in\pi}\right) + \frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi^2 \sin n\pi}{n} + \frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\right)' dx\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\pi^2}{n}\sin n\pi + \left[\frac{2xe^{-inx}}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n^2}e^{-inx}dx\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2}{n^2}[\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}] + \frac{2}{in^3}[e^{-inx}]_{-\pi}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi + \frac{4i}{n^3}\sin n\pi\right\} \\
&= \frac{2\cos n\pi}{n^2} = \frac{2(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}
$$

したがって $f(x)$ の複素フーリエ級数表現は

$$
f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx}
$$

となる.