2005年1月13日 　　　　　　　　　　　　　　学籍番号：
応用数学2 　　　　　　　　　　　　　　　　　　名前：

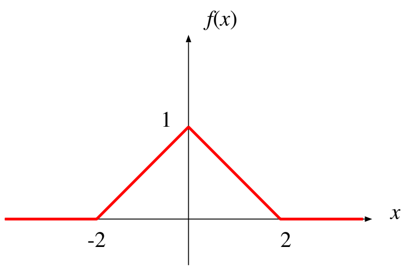
【演習問題】

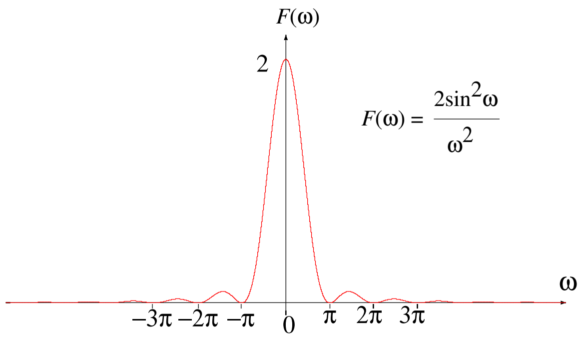
$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{2}, & (-2 < x < 2) \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

のフーリエ変換 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ を求めよ．$f(x)$ と $F(\omega)$ の図も書くこと．

【回答例】

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)(\cos\omega x - i\sin\omega x)\,dx \\
&\quad f(x) \text{ および } \cos x \text{ は偶関数，} \sin x \text{ は奇関数，という性質を用い} \\
&= 2\int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)\cos\omega x dx \\
&= 2\int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{\omega x}\sin\omega x\right)' dx \\
&= 2\left(\left[\left(1 - \frac{x}{2}\right)\frac{1}{\omega x}\sin\omega x\right]_0^2 - \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\omega}\sin\omega x dx\right) \\
&= \frac{1}{\omega}\int_0^2 \sin\omega x dx \\
&= \frac{1}{\omega^2}\left[-\cos\omega x\right]_0^2 \\
&= -\frac{1}{\omega^2}(\cos 2\omega - 1) \\
(&= \frac{2\sin^2\omega}{\omega^2}) \\
F(0) &= \int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_0^2 (1 - \frac{x}{2})dx = 2\left[x - \frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 2 \\
&\quad \text{これは } \lim_{\omega\to 0} 2(\frac{\sin\omega}{\omega})^2 = 2 \text{ と一致し } F(\omega) \text{ は連続な関数である．}
\end{aligned}$$





【解説】

　計算の仕方は何通りかあるが，$f(x)$ が偶関数であることに気づけば，計算が楽になる．$-\dfrac{1}{\omega^2}(\cos 2\omega - 1) = 2(\dfrac{\sin\omega}{\omega})^2$ に気づけばコンピュータを使わなくても，ある程度きれいな図を書ける．