2005 年 1 月 17 日　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　学籍番号：

応用数学 2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　名前：

【演習問題】

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-2 < x < 2) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

をフーリエ変換すると

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = 4\mathrm{sinc}(2\omega) = 4\frac{\sin 2\omega}{2\omega}$$

となる．これは 教科書 p.66 例 2) で $a = 2$ の場合にあたる．そこには $f(x), F(\omega)$ とも図が表示されている．まず $g(x) \equiv F(x) = 4\mathrm{sinc}(2x)$ および $g(x/2), g(2x)$ の図をそれぞれ描きなさい．つぎに $f(x)$ のフーリエ変換の結果 (上記の式）を用い，$g(x), g(x/2), g(2x)$ の フーリエ変換 $\mathcal{F}(g(x))$ などをそれぞれ求め，図を描きなさい．

【回答例】

フーリ逆変換 $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$ において ω を x に，x を $-\omega$ と置き換えると，$f(-\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i\omega x} dx$ を得る．したがって $F(x)$ をフーリエ変換すると $2\pi f(-\omega)$ になり，

$$\mathcal{F}[g(x)] = \begin{cases} 2\pi & (-2 < \omega < 2) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である，以降，この $\mathcal{F}[g(x)]$ を $G(\omega)$ と書く．

$\mathcal{F}[g(\frac{x}{2})] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(\frac{x}{2}) e^{-i\omega x} dx$．ここで $x/2 = t$ と置くと，$2\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\omega t} dt = 2G(2\omega)$ となる．$\mathcal{F}[g(2x)]$ についても同様に計算をおこない，次の解を得る．

$$\mathcal{F}[g(\frac{x}{2})] = \begin{cases} 4\pi & (-1 < \omega < 1) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[(g(2x)] = \begin{cases} \pi & (-4 < \omega < 4) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$