

【演習問題】

インパルス応答  $h(t)$  が

$$h(t) = \begin{cases} a, & (0 \leq t \leq T, a \text{ は正の定数}) \\ 0, & (t < 0, t > T) \end{cases}$$

である線型システム  $S$  に以下の信号

$$f(t) = \begin{cases} 0, & (t \leq 0) \\ 1, & (t > 0) \end{cases}$$

が入力された．たたみこみによりシステムの出力応答  $g(t) = S[f(t)]$  を求めよ．

【回答例】

$$\begin{aligned} g(t) = S[f(t)] &= S \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right] \\ &\text{線形性より} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) S[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &\tau \leq 0 \text{ で } f(\tau) = 0 \text{ より} \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &\tau > 0 \text{ で } f(\tau) = 1 \text{ より} \\ &= \int_0^{\infty} h(t - \tau) d\tau \\ &t - \tau = \tau' \text{ と置換すると, } -d\tau = d\tau' \\ &= - \int_t^{-\infty} h(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^t h(\tau') d\tau' \end{aligned}$$

この積分は時刻  $t$  が以下のような3つの場合に分けて計算をする必要がある．

i)  $t \leq 0$  のとき

0 を積分しても 0 なので  $g(t) = 0$  となる．

ii)  $0 < t < T$  のとき

$$g(t) = \int_0^t h(\tau') d\tau' = \int_0^t a d\tau' = at \text{ となる．}$$

iii)  $t > T$  のとき

$$g(t) = \int_0^t h(\tau') d\tau' = \int_0^T h(\tau') d\tau' = a \int_0^T d\tau' = aT \text{ となる．}$$

【解説】このように計算しても出力について正確な答えは得られるが，その意味は，よくわからない．このような計算をしなくてもインパルス応答の意味「現在時刻における入力は， $T$  時刻先まで影響を及ぼし，それ以上先の時刻へはシステムの出力に何の影響も与えない，さらに，未来からの影響は受けない（因果性がある）」が分かれば簡単に解ける．この問題の場合，時刻  $t$  での出力は， $T$  時刻前から現在までの入力を（重みづけ）積分になることがわかる． $t < 0$  では入力が 0 であるので出力も 0 である．あとは， $t < T$  の場合は， $T$  時刻前の入力は 0 であるので，上のような場合分けが必要なことに注意すればいい．