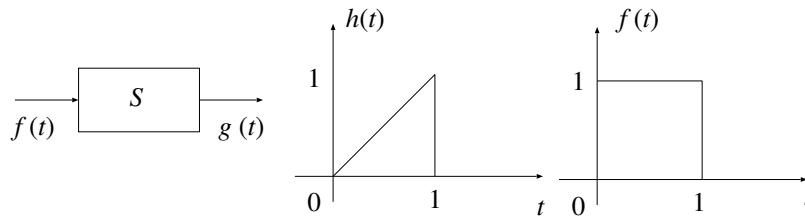


【演習問題】



インパルス応答 $h(t)$ が

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

である線型システム S に以下の信号

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

が入力された。たたみこみ積分によりシステムの出力応答 $g(t) = S[f(t)]$ を求め図示しなさい。

【回答例】

$$\begin{aligned} g(t) = S[f(t)] &= S \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right] \\ &\text{線形性より} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) S[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &\tau \leq 0, \tau > 1 \text{ で } f(\tau) = 0 \text{ より} \\ &= \int_0^1 f(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &0 \leq \tau \leq 1 \text{ で } f(\tau) = 1 \text{ より} \\ &= \int_0^1 h(t - \tau) d\tau \\ &t - \tau = \tau' \text{ と置換すると, } -d\tau = d\tau' \\ &= - \int_t^{t-1} h(\tau') d\tau' = \int_{t-1}^t h(\tau') d\tau' \end{aligned}$$

したがって、この積分は時刻 t が以下のように分けて計算をする必要がある。

i) $t \leq 0$ および $t > 2$ のとき

0 を積分しても 0 なので $g(t) = 0$ となる。

ii) $0 < t < 1$ のとき

$$g(t) = \int_0^t h(\tau') d\tau' = \int_0^t \tau' d\tau' = \frac{t^2}{2}$$

iii) $1 < t < 2$ のとき

$$g(t) = \int_{t-1}^1 h(\tau') d\tau' = \int_{t-1}^1 \tau' d\tau' = \frac{1}{2} - \frac{(t-1)^2}{2} = \frac{t(2-t)}{2}$$

